UTN
FACULTAD
REGIONAL
DEL NEUQUÉN

SEMINARIO DE INGRESO TECNICATURAS UNIVERSITARIAS

Guía de Estudio de Matemática

Introducción:

Con el objetivo de brindar al alumno ingresante una guía con la cual poder organizar el aprendizaje y a la vez hacer un seguimiento continuo del desarrollo de las clases, se presenta un cuadernillo impreso o digitalizado al momento de la inscripción.

La modalidad para el desarrollo de las clases y para el mejor aprovechamiento del tiempo requiere de parte del alumno el compromiso del estudio previo del material.

En la clase se desarrollaran algunos conceptos esenciales que servirán de herramienta básica para usar la mayor carga horaria en la resolución de situaciones problemáticas.

Al final del cuadernillo encontrarás modelos de evaluación tomados en años anteriores y al acercarse a las instancias evaluativas, para evacuar dudas, se asiste al alumno con clases de consultas impartidas por alumnos tutores.

Es necesario decir que el carácter del siguiente material no es de ningún modo puramente informativo, sino que recopila los conocimientos útiles y necesarios para aumentar el entusiasmo de los futuros alumnos de esta casa de altos estudios.

Invita a los mismos a ampliar sus conocimientos con la bibliografía tan rica y basta acerca de las Matemáticas, el Cálculo y, la Física.

Por lo que queda abierta una gran puerta al conocimiento para todos aquellos dispuestos a atravesarla.

Por ello insistimos en la actitud de trabajo responsable que el estudiante debe asumir, sumando entusiasmo, voluntad, creatividad, apertura para superar limitaciones y espíritu crítico para avanzar con compromiso hacia un desarrollo nacional, provincial y local sustentable.

"Todo debe Hacerse tan sencillo como sea posible, pero sin excederse en ello"

Albert Einstein

Estructura Universitaria:

Autoridades UTN:

Rector: Ing. Rubén Soro

Vicerrector: Ing. Haroldo Avetta

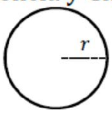
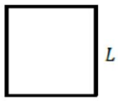
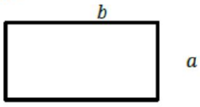
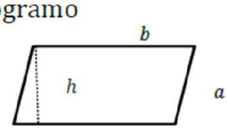
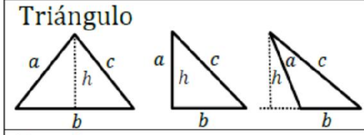
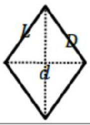
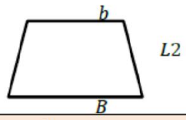
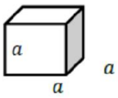
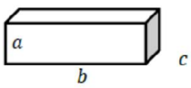
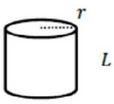
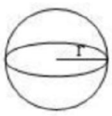
Autoridades Facultad Regional del Neuquén:

Decano: Ing. Pablo Oscar Liscovsky.
Secretaria Académica: Ing. Patricia González.
Secretaria de Extensión Universitaria: Lic. Ailén Vázquez
Secretario de Ciencia y Tecnología: Ing. Gustavo Monte
Secretaria Administrativa: Lic. Mariana García Rolón
Secretario de Bienestar Estudiantil: Sr. Pablo Mendoza
Secretario de Vinculación: Ing. Walter Mardones
Secretario de TIC: Lic. Gustavo A. Laz Contreras

Tabla de símbolos matemáticos:

$<$	Menor ($a< b$ significa que a es menor que b)
$>$	Mayor ($a> b$ significa que a es mayor que b)
$=$	Igual
$\neq$	No es igual, o es diferente a…
$/$	Tal que
$:$	Tal que
$\rightarrow$	Entonces
$\leftrightarrow$	Si y solamente si
∞	Infinito
$\therefore$	Por lo tanto
$\cong$	Aproximadamente igual
$\lvert x\rvert$	Valor absoluto de x, es decir, $\lvert x\rvert = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0. \end{cases}$
$\leq$	Menor o igual ($a \leq b$ si a es menor o es igual a b)
$\geq$	Mayor o igual ($a \geq b$ si a es mayor o es igual a b)
$\pm$	Más/menos: $\pm a$ representa dos valores: $+a$ y $-a$.
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\subset$	Inclusión (A $\subset$ B si el conjunto A está contenido en el conjunto B).

Fórmulas geométricas:

Gráfico de figura	Perímetro	Área
Circunferencia y Círculo 	$P = 2\pi r$ Circunferencia	$A = \pi r^2$ Círculo
Cuadrado 	$P = 4L$	$A = L^2$
Rectángulo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,a$
Paralelogramo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,h$
Triángulo 	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b\,h}{2}$
Rombo 	$P = 4\,L$	$A = \dfrac{D\,d}{2}$
Trapecio 	$P = B + b + L1 + L2$	$A = \dfrac{(B+b)}{2}\,h$
Gráfico de cuerpo	**Área**	**Volumen**
Cubo 	$A = 6\,a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo 	$A = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ac$	$V = a\,b\,c$
Cilindro 	$A = 2\pi r^2 + 2\pi r L$	$V = \pi r^2 L$
Esfera 	$A = 4\pi r^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Objetivos:

Al finalizar el estudio y evaluación del curso Ud. será capaz de:

- Utilizar los contenidos brindados en el curso, que sumados a sus aprendizajes previos, le permitirán abordar los conocimientos de las asignaturas de la carrera elegida.
- Afianzar la destreza resolutiva en temas básicos como aplicación de conceptos teóricos.
- Resolver situaciones problemáticas valorando la creatividad del alumno en el planteo del problema.

Esquema conceptual del contenido del curso de matemática:

Unidad 1: Conjuntos Numéricos e Intervalos.

Unidad 2: Polinomios.

Unidad 3: Ecuaciones.

Unidad 4: Funciones.

Unidad 5: Trigonometría.

Indice de contenidos:

2.4.1. Raices particulares de un polinomio.
2.4.2. Raices comunes.
2.4.3. Relaciones entre coeficientes y raíces.
2.4.4. Casos que se reducen a ecuaciones de segundo grado.
2.4.4.1. Polinomios ciclotónicos.
2.4.4.2. Polinomios simétricos.
2.4.4.3. Polinomios hemisimétricos.
2.5. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.
2.5.1. Simplificación de expresiones racionales.
2.5.2. Operaciones con expresiones algebraicas racionales.
2.5.2.1. Adición y sustracción.
2.5.2.2. Multiplicación.
2.5.2.3. División.

Unidad N°3: Ecuaciones

3.1. Introducción.
3.2. Solución de ecuaciones de primer grado.
3.2.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
3.2.2. Ecuaciones fraccionarias.
3.2.3. Solución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.
3.2.4. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
3.2.4.1. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
3.2.4.1.1. Método de sumas y restas.
3.2.4.1.2. Método de sustitución.
3.2.4.1.3. Método de igualación.
3.2.4.1.4. Método gráfico.
3.3. Solución de ecuaciones de segundo grado.
3.3.1. Métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado.
3.3.1.1. Método de la fórmula general.
3.3.1.2. Método de factorización.
3.3.2. Discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado.
3.3.3. Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado.
3.3.4. Construcción de una ecuación de segundo grado conociendo sus raíces.
3.3.5. Propiedades adicionales de las raíces.
3.4. Sistemas de ecuaciones mixtos.

Unidad N°4: Funciones

4.1. Relaciones funcionales.
4.1.1. Introducción.
4.1.2. Definición formal de función.
4.2. Evaluación y representación gráfica de funciones.
4.2.1. Evaluación de funciones.
4.2.2. Coordenadas cartesianas.
4.2.3. Gráfica de funciones.
4.2.3.1. Función lineal.
4.2.3.1.1. Ecuación de la recta conocidos dos puntos.
4.2.3.1.2. Ecuación de la recta conocida la pendiente y un punto.
4.2.3.1.3. Rectas paralelas y perpendiculares.
4.2.3.2. Función cuadrática.
4.2.3.3. Función módulo.

4.2.3.4. Función exponencial.
4.2.3.5. Función logarítmica.
4.2.3.6. Funciones racionales.
4.3. Clasificación de funciones.
4.3.1. Función inyectiva.
4.3.2. Función sobreyectiva.
4.3.3. Función biyectiva.
4.4. Análisis de funciones.
4.4.1. Dominio e imagen.
4.4.2. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4.4.3. Paridad e imparidad.
4.4.4. Intervalos de positividad y negatividad.

Unidad N°5: Trigonometría

5.1. Angulos y sistemas de medición.
5.1.1. Introducción.
5.1.2. Sistemas de medición de ángulos.
5.1.2.1. Sistema sexagesimal.
5.1.2.2. Sistema circular o radial.
5.2. Razones trigonométricas.
5.3. Identidades trigonométricas.
5.4. Funciones trigonométricas.
5.4.1. Función seno.
5.4.2. Función coseno.
5.4.3. Función tangente.
5.5. Análisis de funciones trigonométricas.

Bibliografía Recomendada:

- Carlos Abdala (et. al.) “Matemática 1 polimodal” Ed. Aique Argentina
- De Simone Turner “Matemática” Ed. AZ
- Andrés Me Kaczor (et. al.) “Matemática 9 EGB” Ed. Santillana.
- Pallo Koczor (et. al.) “Matemática 1 Polimodal” Ed. Santillana.
- Paenza Adrian “¿Matemática, estas ahí?”.
- Louis Leithold “El Cálculo” Ed. Oxford
- Hebe T. Rabufetti “Análisis Matemático I” Ed. Eudeba

Unidad 1:

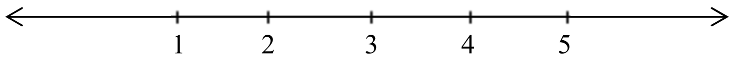
Conjuntos Numéricos e intervalos.

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para contar una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un orden entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer medidas (3,2 metros, 5,7 kg, -4ºC, etc.).

1.1. NÚMEROS NATURALES

Al conjunto de los números que sirven para contar: $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ los llamaremos números naturales y lo notaremos con la letra $\mathbb{N}$.

Estos números están ordenados, lo que nos permite representarlos sobre una recta del siguiente modo:



Actividad:

• ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un antecesor? ¿Por qué? Ejemplificar.

………

• ¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un sucesor? ¿Por qué? Ejemplificar.

………

Como ya sabemos, sobre este conjunto de números se pueden definir ciertas operaciones como suma, resta, multiplicación y división. Observemos lo siguiente:

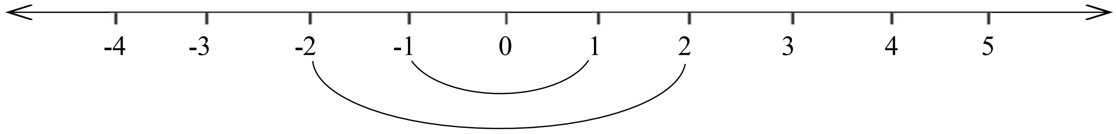
La suma de dos números naturales da siempre como resultado un número natural $\begin{cases} 2+5=7 \\ 5+2=7 \\ 3+20=23 \end{cases}$

El producto de dos números naturales da siempre como resultado un número natural $\begin{cases} 2\,.\,7=14 \\ 5\,.\,8=40 \\ 3\,.\,10=30 \end{cases}$

Pero…. ¿Qué sucede con la resta? $\begin{cases} 8-3=5 \\ 7-20=? \\ 5-5=? \end{cases}$

1.2. NÚMEROS ENTEROS

Para solucionar el problema de la resta, se crean los números negativos -1, -2, -3, etc. como opuestos de los números naturales. Además se incorpora el cero para dar solución a la resta de un número consigo mismo. El conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero constituyen el conjunto de los números enteros, que se indica con la letra $\mathbb{Z}$. Notemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.



Es opuesto de…

Veamos algunos ejemplos:

- El opuesto de 2 es -2.
- El opuesto de -5 es 5, es decir -(-5) = 5
- El opuesto de 0 es……………………

De esta manera, podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos números enteros.

Ejemplo: Calcular:

1) $23 + (-12) = ¿?$ ***Solución:*** sumar -12 es lo mismo que restar su opuesto, o sea 12, es decir:
$$23 + (-12) = 23 - 12 = 11$$
2) $9 - (-20) = ¿?$ ***Solución:*** restar -20 es lo mismo que sumar su opuesto, o sea 20, por lo tanto:
$$9 - (-20) = 9 + 20 = 29$$

Actividad:
Completar:
• La suma de dos números enteros da siempre un número…………………………………………………
……………………………………………………………………………Dar dos ejemplos.
• La multiplicación de dos números enteros da siempre un número………………………………………
……………………………………………………………………………Dar dos ejemplos.

Veamos que ocurre con la división. Observemos lo siguiente:

$$\frac{4}{2} = 2 \; ya \; que \; 2 \,.\, 2 = 4$$
$$\frac{6}{3} = 2 \; ya \; que \; 2 \,.\, 3 = 6$$

En general $\frac{a}{b} = c, con\; b \neq 0 \; si \; se \; verifica \; que \; b \,.\, c = a$

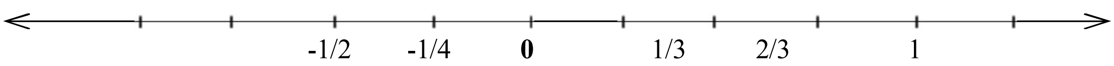
1.3. NÚMEROS RACIONALES

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los números racionales al que denotaremos con la letra ℚ. Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros m, y n, siendo n ≠ 0. Por lo tanto:

$Q = \left\{\frac{m}{n}, m \wedge n \in Z \; con \; n \neq 0\right\}$, donde m es el numerador y n el denominador.

Notemos que ℤ ⊆ ℚ. ¿Por qué?.............

Representemos en la recta numérica algunos números racionales:



Veamos algunos ejemplos de números racionales:

$$\frac{7}{5} \textit{es racional pues es el cociente de } 7 \textit{ y } 5 \textit{ que son números enteros.}$$
$$-\frac{4}{3} \textit{es racional pues es el cociente de } -4 \textit{ y } 3 \textit{ que son números enteros.}$$
$$4 \textit{ es racional pues } \frac{4}{1} = 4 \textit{ y } 4 \textit{ y } 1 \textit{ son números enteros.}$$

<u>Tres ejemplos mas:</u>

- $0{,}3$ *es la expresión decimal de un número racional porque* $\frac{3}{10} = 0{,}3$ *y* 3 *y* 10 *son números enteros.*
- $0,\hat{5} = 0{,}5555555 \ldots$ *es la expresión decimal de un número racional porque* $0,\hat{5} = \frac{5}{9}$ *y* 5 *y* 9 *son números enteros.*
- $0{,}1\hat{5} = 0{,}155555 \ldots$ *es la expresión decimal de un número racional porque* $0{,}1\hat{5} = \frac{14}{90}$ *y* 14 *y* 90 *son números enteros.*

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional.

- *Expresión decimal finita*: $0{,}3$; $-0{,}107$; $12{,}0001$
- *Expresión decimal periódica pura*: $0,\hat{5} = 0{,}5555 \ldots$; $7,\widehat{20} = 7{,}202020 \ldots$
- *Expresión decimal periódica mixta*: $0{,}1\hat{5} = 0{,}15555 \ldots$; $-5{,}25\widehat{13} = -5{,}25131313 \ldots$

Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal $23{,}3\hat{5}$. Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?.

Para hallar esta fraccion, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

$$\frac{(\textit{todas las cifras de la expresión}) - (\textit{las cifras no periódicas de la expresión})}{\textit{tantos } 9 \textit{ como cifras decimales periódicas y tantos } 0 \textit{ como cifras decimales no periódicas}}$$

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos:

$23{,}3\hat{5} = \frac{2335-233}{90} = \frac{2102}{90}$ y simplificando la expresión obtenemos: $23{,}3\hat{5} = \frac{1051}{45}$

<u>Otro ejemplo:</u>

$$32{,}1\widehat{427} = \frac{321427 - 321}{9990} = \frac{321106}{9990} = \frac{160553}{4995}$$

"Recordemos que siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos."

Definimos el inverso de un número $a \neq 0$ como el número racional que multiplicando por a nos da 1, es decir: $a.\frac{1}{a} = 1$

Ejemplos:

- El inverso de $a = \frac{2}{5}$ es $\frac{1}{a} = \frac{5}{2}$ pues $\frac{2}{5} . \frac{5}{2} = 1$
- El inverso de $a = -\frac{27}{2}$ es $\frac{1}{a} = -\frac{2}{27}$ pues $-\frac{27}{2} . (-\frac{2}{27}) = 1$

De esta manera, redefinimos la división de dos enteros como la multiplicación de dos racionales. Además, podemos extender esta idea a la división de dos racionales.5, definiéndola como la multiplicación del primero por el inverso del segundo.

Ejemplos:

- $2 : 5 = 2 . \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ es decir a “2 dividido 5” lo pensamos como la multiplicación de los números racionales 2 y $\frac{1}{5}$
- $3 : \frac{1}{2} = 3 . 2 = 6$ es decir a “3 dividido 1/2” lo pensamos como la multiplicación entre 3 y el inverso de $\frac{1}{2}$ que es 2

Actividad:
Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar:

- $\frac{3}{5} = 3 . \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
- $\frac{-2}{-3} = -2 . \frac{1}{3}$
- La quinta parte de $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{5} . \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
- $-\frac{3}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{3}{-8}$

- *Como vimos anteriormente, el sucesor inmediato de un número natural n es n+1, por ejemplo el sucesor inmediato de 5 es 5+1=6. Si consideramos el conjunto de los racionales, ¿se puede decir cual es el sucesor inmediato de 1/2?*...
- *¿Se puede determinar cuántos números racionales hay entre 1/5 y 2?*...

Observemos que estre dos números racionales a y b, a < b, existe el racional $\frac{a+b}{2}$ que verifica:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un conjunto **DENSO**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$, que son conjuntos **DISCRETOS.**

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES

¿Se puede representar a todos los números que se conocen mediante una expresión decimal finita o periódica?

Para contestar a esta pregunta, se debe pensar en un número muy conocido, el número π. ¿Cuál es el valor de π ? Una calculadora con 8 dígitos dará como valor de π al 3,141593; una calculadora con 10 dígitos dará como valor de π al 3,14159264. En algún libro de matemática se puede encontrar, por ejemplo:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3{,}14159265358979323846.}$$

¿Será π un número racional? ¿Por qué?...

A los números reales cuya expresión decimal no es finita ni periódica los llamaremos ***números irracionales***. A este conjunto lo denotaremos con $\mathbb{I}$. Algunos ejemplos son:

- $\pi = 3{,}1415926535 \ldots$
- $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots$
- $-\sqrt{5} = -2{,}236067977 \ldots$
- $e = 2{,}7182828 \ldots$

Los números irracionales tambien tienen su ubicación en la recta numérica.

Observemos que la suma de dos números irracionales no siempre da un número irracional y que el producto de dos números irracionales no siempre da un número irracional.

Buscar ejemplos en donde se verifiquen dichas afirmaciones.

Observar que si n ∈ $\mathbb{Z}$, entonces n·$\sqrt{2}$ (si n ≠ 0) y n + $\sqrt{2}$ son también números irracionales. Se puede generalizar que si $r \in \mathbb{Q}\, y\, t \in \mathbb{I},\ r+t\ y\ r\,.\,t\ (si\, r \neq 0)$ son números irracionales. Obviamente $\mathbb{I}$ también es un conjunto infinito de números.

1.5. NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de números reales, y se designa con la letra $\mathbb{R}$. Notemos que, por esta definición $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Los números reales llenan por completo la recta numérica, por eso se la llama recta real. Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

<u>Resumiendo:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}Naturales\ \mathbb{N}\\ \{0\}\\ Opuestos\ de\ los\ \mathbb{N}\end{array}\right\}Enteros\ \mathbb{Z}\\ Fraccionarios\left\{\begin{array}{l}Exactos\\ Peri\acute{o}dicos\left\{\begin{array}{l}Puros\\ Mixtos\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Racionales\ \mathbb{Q}\\ Irracionales\ \mathbb{I}\end{array}\right\}Reales\ \mathbb{R}\\ Imaginarios\ \mathbb{i}\end{array}\right\}Complejos\ \mathbb{C}$$

1.5.1. Propiedades de las operaciones en el conjunto de los reales

1.5.1.1. Suma y Producto

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:

Sean a, b y c números reales cualesquiera:

PROPIEDADES	DE LA SUMA	DEL PRODUCTO
Ley de cierre	$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c) = (a+b)+c$ *	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *
Conmutativa	$a+b = b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0 = 0+a = a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a = a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a) = (-a)+a = 0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a =1$ si $a \neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$	

***Observación:** la propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente a + b + c **ó** a . b . c

Actividad:

1) *Comprobar con ejemplos las propiedades anteriormente mencionadas*……………..........................
……

2) *Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas.*

a) $\frac{1}{3}.(5+4)=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}$
b) $-2.\left(\frac{8}{9}-5\right)=\frac{-4}{9}-10$
c) $\sqrt{2}+c=c+\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}+2+[8.(-9)]=\left(\sqrt{2}+8\right).[2+(-9)]$
e) $\frac{1}{a}.a=1\ \forall\, a\in\ \mathbb{R}$
f) $Existe\ un\ número\ real\ x\ para\ el\ cuál\ \frac{\sqrt{5}}{\pi}+x=0$

1.5.2. Operaciones en el conjunto de los reales

1.5.2.1. Potenciación

Sí “a” es un número real y “n” es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando “n” veces el factor “a”, es decir:

$$a^n = a.a.a\dots\dots a\ (n\ veces)$$

Ejemplo: $a^6 = a.a.a.a.a.a$ **y** $a^3 = a.a.a$

Decimos entonces que a^n es una **potencia** que tiene a “a” como **base** y a “n” como **exponente**.

Extendemos la definición para exponentes enteros $\mathbb{Z}$ definiendo, para a ≠ 0:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n \; con\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Actividad:

Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) $2^8 = 2^2.2^6 = 2^5.2^3$
b) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$
c) $(8.3)^2 = 8^2.3^2$
d) $(2^3)^2 = 2^5$
e) $(2^3)^2 = 2^6$
f) $-3^2 = (-3)^2$
g) $5^4 = 4^5$
h) $\left(\frac{5}{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = \frac{5^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$
i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las propiedades de la potencia.

Sean **a** y **b** números reales distintos de 0 y sean **m** y **n** números enteros, entonces:

PROPIEDADES DE LA POTENCIA	
Distributiva con respecto al producto	$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Producto de potencias de igual base	$a^n\,.\,a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$

Observación: *Como se vió en el ejercicio anterior, la potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.*

Actividad:

- *¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?*...
- *¿Existe alguna potencia de 5 que dé como resultado un número negativo? ¿Por Qué?*.....................
………………………………………………………………………………………………………

1.5.2.2. Radicación

Para los enteros positivos "n" ya se ha definido la n-ésima potencia de "b", a saber, b^n. Ahora vamos a utilizar la ecuación $a = b^n$ para definir la n-ésima raíz de "a".

La notación de la raíz cuadrada de 49 es $\sqrt{49}$. Su valor es 7 porque $7^2 = 49$ y 7 > 0. Aun cuando $(-7)^2 = 49$, el símbolo $\sqrt{49}$ se usa solo con +7 y no con -7, así se tendrá un solo valor de $\sqrt{49}$. Claro que siempre es posible escribir -$\sqrt{49}$ si se desea el valor negativo -7. Además $\pm\sqrt{49} = \pm 7$. Podemos observar que -49 no tiene una raíz cuadrada real ya que $b^2 \geq 0$ para todo número real b, por lo que $b^2 = -49$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. En general, la **raíz cuadrada** de a se define como sigue. A veces recibe el nombre de **raíz cuadrada principal de a**.

Si a es un número real positivo, $\sqrt{a} = b$ si y solo si $a = b^2 \; y \; b > 0$

Además $\sqrt{0} = 0$

Ejemplo:

$$\sqrt{49} = 7, pues\ 7^2 = 49\ (no\ es - 7\ ni + 7)$$

Actividad:
Calcular el valor de cada una de las expresiones que siguen, en caso de estar definida:

a) $\sqrt{169}$
b) $-\sqrt{169}$
c) $\pm\sqrt{169}$
d) $\sqrt{625}$
e) $\sqrt{-144}$
f) $\sqrt{-25}$

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo:

$$2^3 = 8\ y\ (-5)^3 = -125$$

Se puede decir entonces que:

Si a y b son números reales cualesquiera, $\sqrt[3]{a} = b\ si\ y\ solo\ si\ a = b^3$

En particular: $\sqrt[3]{0} = 0$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{343} = 7\ pues\ 7^3 = 343$$
$$\sqrt[3]{1728} = -12\ pues\ (-12)^3 = -1728$$

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero.

Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.

Lo mismo sucede con los enteros positivos mayores “n”: la distinción fundamental surge de si “n” es par o impar.

- Si **n** es un entero positivo par y **a** y **b** son **números reales positivos** tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$.
- Si **n** es un entero positivo impar y **a** y **b** son **números reales** tales que $a = b^n$, entonces se escribe $\sqrt[n]{a} = b$.
- En cualquiera de los dos casos, $\sqrt[n]{0} = 0$. Además, $\sqrt[n]{a}$ se llama **raíz n-ésima de a**.

El símbolo $\sqrt{a}$ se utiliza solo para representar $\sqrt[2]{a}$.
Observaciones:

- $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de **n-ésima raíz principal de a** para indicar que $\sqrt[n]{a}$ se define positivo si a > 0.
- El número a es el **radicando**, $\sqrt{\ }$ es el **signo radical**, n es el **índice** del radical y $\sqrt[n]{a}$ es la **expresión radical** o raíz n-ésima de a.

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuáles son análogas a las de la potenciación:

PROPIEDADES DE LA RADICACION	
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a\,.\,b}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de raíz.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$

En particular:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n.m]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\ \textit{radicales superpuestos}$$
$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.p]{a^{m.p}}$ Ejemplo: $\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3.2]{a^{2.2}}=\sqrt[3]{a^2}$

Actividad:

- *Al igual que con la potenciación, la radicación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta. Proponga ejemplos que muestren que la distributiva no se cumple*………………………
………………………………………………………………………………………………….........
- *¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical:* $\sqrt{(-4).(-16)}$*?*...............
..……………………………………………………………………………………………………..

1.5.2.3. Simplificación de radicales

Efectuar las siguientes operaciones:

- $\sqrt[4]{2^8}$; $\sqrt{2^4}$ $(Rta{:}\ 2^2)$
….…………………………………………………………………………………………………
- $\sqrt[10]{3^{20}}$; $\sqrt{3^4}$ $(Rta{:}\ 3^2)$
….……………………………………………………………………………………………………
- $\sqrt{(-2)^6}$ $(Rta{:}\ (-2)^3)$
………………………………………………………………………………………………………

> *Observemos que en algunos casos se puede dividir el indice de la raiz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos* ***simplificacion de radicales****.*

- *¿En qué casos es posible simplificar radicales y en qué casos no?*..
……………………………………………………………………………………………………….

1.5.2.4. Racionalización de denominadores

Sabemos efectuar divisiones cuando el divisor es un número racional, pero ¿Qué sucede si hacemos la división de 3 en $\sqrt{2}$? ¿Cómo realizaríamos dicha operación?

Podemos solucionar este inconveniente si encontramos un cociente equivalente al anterior cuyo denominador sea un número racional. Al procedimiento que nos permite hallar tal cociente equivalente se lo denomina racionalización de denominadores.

Veamos algunos ejemplos:

- $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} . \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{17.21}}{\sqrt{(21)^2}} = \frac{\sqrt{357}}{21}$

- $\frac{5}{\sqrt[7]{3.5^3}} = \frac{5}{\sqrt[7]{3.5^3}} . \frac{\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3^6.5^4}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3.5^3.3^6.5^4}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^6.5^4}}{\sqrt[7]{3^7.5^7}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^6.5^4}}{3.5} = \frac{\sqrt[7]{3^6.5^4}}{3}$

En ambos casos, para racionalizar una expresión del tipo $\frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $m < n\ y\ b \in \mathbb{N}$, lo que se hizo fue multiplicar y dividir dicha expresión por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. De esto resulta una expresión cuyo denominador es $\sqrt[n]{b^m.b^{n-m}} = \sqrt[n]{b^n}$, y así podemos simplificar índice y exponente para eliminar la raíz del denominador.

Actividad:

Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\frac{-8}{\sqrt{2}.\sqrt[5]{3}} =$

b) $\frac{7}{\sqrt{5^3.3^4}} =$

1.5.2.5. Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

- $a^{\frac{6}{3}} = a^2\ y\ \sqrt[3]{a^6} = a^2$
- $a^{\frac{15}{5}} = a^3\ y\ \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\ donde\ a \in \mathbb{N}\ y\ m \in \mathbb{N}}$$

Actividad:

Llevar a exponente fraccionario y resolver:

a) $\sqrt[8]{13}.\left(\frac{1}{13}\right)^{-2} =$

b) $\frac{7^{-2}.\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt[3]{7^{-5}}} =$

c) $\sqrt{\frac{a.\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}} =$

d) $\frac{16^{0,25}.\sqrt[3]{2}}{-4} =$

1.5.2.6. Logaritmo

Sea **a** un número real positivo distinto de 1, si **b** es otro número real positivo, llamaremos logaritmo en base **a** de **b** al único número **x** que verifica $\boldsymbol{a^x = b}$. Es decir:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \forall\, a > 0, a \neq 1 \wedge b > 0}$$

Ejemplo:

$\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

$\log_{14} 1 = 0 \Leftrightarrow 14^0 = 1$

$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = \frac{1}{25}$

Propiedades de los logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, podemos escribir las siguientes propiedades, que son consecuencia inmediata de las leyes de la potenciación:

$$Si\ a > 0, a \neq 1\ \wedge b > 0\ \Longrightarrow$$

- El logaritmo de 1 en cualquier base, siempre es 0.
$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

- El logaritmo de la base en la misma base siempre es igual a 1.
$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.
$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.
$$\log_a(b:c) = \log_a b - \log_a c$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.
$$\log_a b^m = m.\log_a b$$
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n}.\log_a b$$

Cambio de base de los logaritmos

$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$ donde **c** es la base elegida para simplificar cálculos.

Ejemplos:

$$\log_{216} 36 = \frac{\log_6 36}{\log_6 216} = \frac{2}{3}$$

$$\log_{81} 243 = \frac{\log_3 243}{\log_3 81} = \frac{5}{4}$$

$$\log_{81} 250 = \frac{\log_{10} 250}{\log_{10} 81} = 1{,}256 \ldots$$

NOTA: la definición de logaritmo es válida para toda base real positiva arbitraria (diferente de 1), pero las bases más utilizadas en los cálculos de nuestro interés son **10** (logaritmo decimal) y ***e*** (logaritmo natural o neperiano donde $e = 2{,}718\ldots$). A veces se escribe log para representar $\log_{10}$ y ln para el $\log_e$ (por ejemplo en las calculadoras), dicha nomenclatura será adoptada tambien en éste curso.

1.6. INTERVALOS

Es un subconjunto numérico definido a partir de sus extremos. Toma todos los números reales que están entre dos extremos. Geométricamente, los intervalos corresponden a segmentos de rectas graficadas en 1D es decir sobre un único eje.

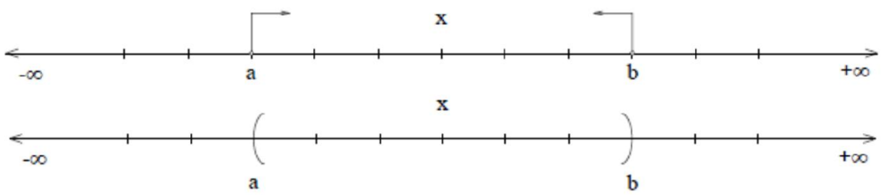
Pueden ser abiertos o cerrados según tomen o no los puntos extremos (también llamados puntos de frontera), los puntos restantes se denominan puntos interiores del intervalo.

Su clasificación es entre finitos si corresponden a un segmento de recta definido, o infinitos si corresponden a semirrectas, es decir que corresponden a un segmento de recta que no incluye o incluye parcialmente a los extremos.

1.6.1. Notación:

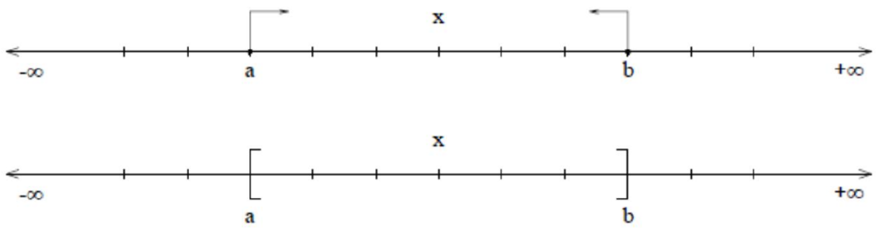
Intervalo ABIERTO FINITO: Corresponde a un segmento de recta que no incluye los puntos extremos del intervalo:

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$



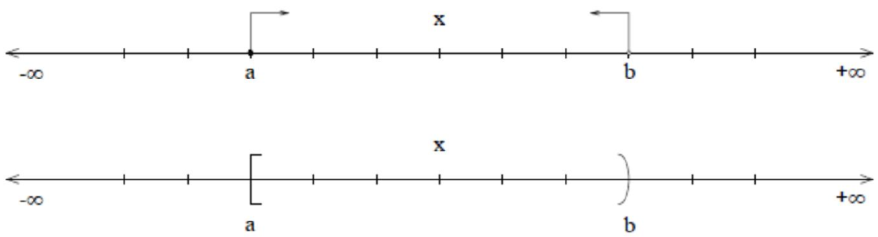
Intervalo CERRADO FINITO: Corresponde a un segmento de recta que incluye a los puntos extremos del intervalo:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$

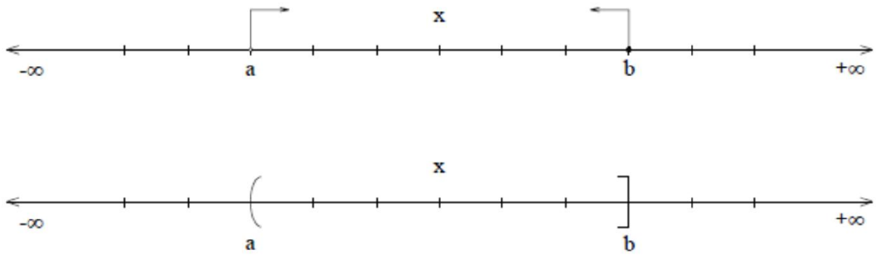


Intervalo SEMI ABIERTO o SEMI CERRADO FINITO: Corresponde a un segmento de recta que incluye solo a uno de los extremos del intervalo.

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$

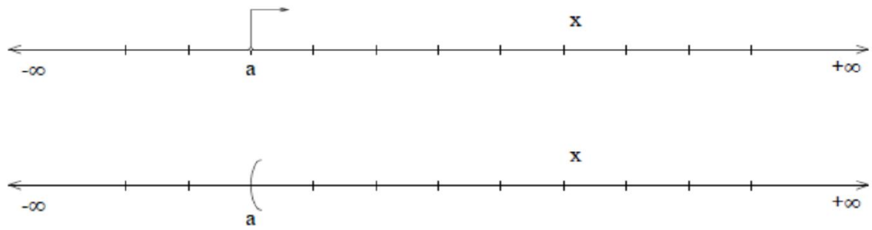


$$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$

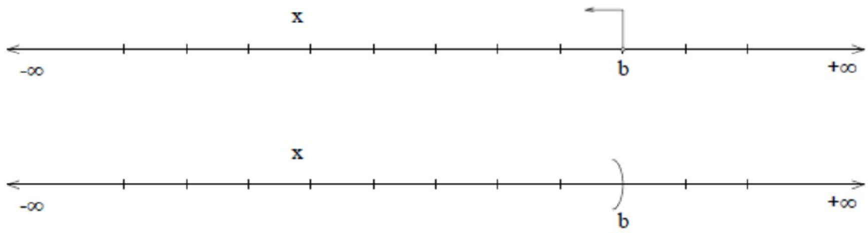


Intervalo ABIERTO INFINITO: Corresponde a un segmento de recta que no incluye un valor extremo e incluye valores infinitos ya sean del lado izquierdo o del lado derecho de la recta.

$$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$$

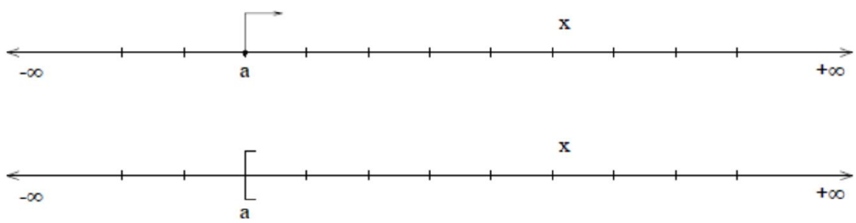


$$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ b > x\}$$

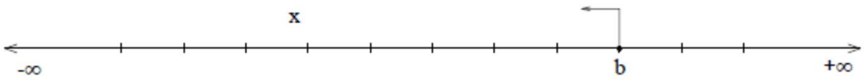


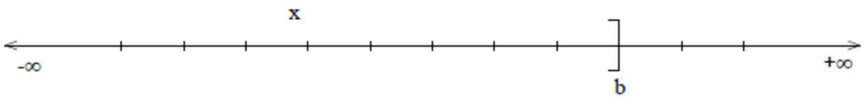
Intervalo CERRADO INFINITO: Corresponde a un segmento de recta que incluye un valor extremo e incluye valores infinitos ya sean del lado izquierdo o del lado derecho de la recta.

$$[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\}$$



$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ b \geq x\}$$





Actividad:

Representar gráficamente los siguientes intervalos:

a) $(-\infty; -3]$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 5 \leq x\}$

c) $(1/2; +\infty)$

d) $7 \geq x \geq 4$

e) $-2 \leq x \leq -1$

f) $x \in [-120; 200)$

1.7. VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

El valor absoluto de un número "x", simbolizado por $|x|$, se define del siguiente modo:

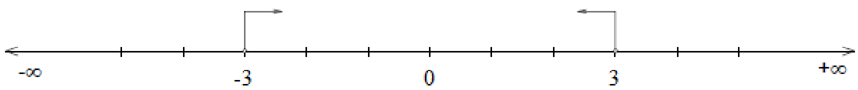
$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada del número no negativo "x", otra forma de definir el módulo de un número es:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

NOTA: Esta forma de expresar el módulo es útil para despejar ecuaciones cuya incógnita está elevada a una potencia par.

Gráficamente, el módulo de un número representa la distancia que existe al origen en la recta real como se muestra a continuación:



1.7.1. Distancia entre dos números

La distancia "d" entre dos números reales a y b, es el valor absoluto de la diferencia entre a y b.

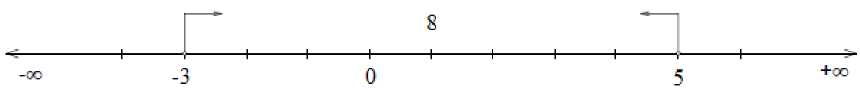
Simbólicamente:

$$|a - b| = |b - a| = d$$

<u>Ejemplo:</u>

La distancia entre los números 5 y -3 es:

$$|5 - (-3)| = |-3 - 5| = 8 \quad entonces \ d = 8$$



1.7.2. Propiedades del Módulo

II. $si\ x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0 \quad (El\ resultado\ siempre\ es\ un\ número\ positivo)$

III. El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto (no negativo):

$$|x| = |-x|.$$

IV. El módulo del producto de dos números reales es igual al producto de los módulos de esos números:

$$|a\,.\,b| = |a|\,.\,|b|$$

V. El módulo del cociente de dos números reales es igual al cociente de los módulos de esos números:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ con\ b \neq 0$$

VI. El módulo de la suma de dos números es igual o menor que la suma de los módulos:

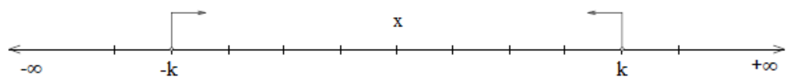
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

VII. El módulo de la diferencia de dos números es mayor o igual que la diferencia de los módulos:

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

VIII. Desigualdades, si $x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$ entonces se verifica:

De la desigualdad $|x| < k$, que dice que la distancia de x a 0 es menor que k, concluimos que x debe estar entre $-k\ \ y\ \ k. O\ sea\ |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$, lo que gráficamente se ve como:



1.8. NUMEROS COMPLEJOS

1.8.1. Definición

Los Números Complejos son una extensión de los números reales, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Los números complejos tienen la capacidad de representar todas las raíces de los polinomios, cosa que con los reales no era posible.

Esto se consigue gracias a que los complejos hacen uso de una unidad imaginaria llamada número i, que verifica la propiedad:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

Esta unidad imaginaria es de hecho la que permite definir las operaciones con esos números, puesto que para efectuarlas hay que tener presente que cada lado de esa unidad imaginaria debe trabajarse en forma independiente, no confundiendo, por decirlo de alguna forma, las peras y las manzanas.

1.8.2. Representación binomial

Cada número complejo se representa en forma binomial como:

$\boldsymbol{z = a + i.b}$ donde **a** es la parte real del número complejo **z** y **b** es la parte imaginaria.

Esto se expresa así:

$$a = Re(z)$$
$$b = Im(z)$$

1.8.3. Operaciones en el conjunto de los complejos

Las operaciones aritméticas en el conjunto de los números complejos se definen de la siguiente manera:

Igualdad $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
Adición $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d).i$
Multiplicación $(a + bi).(c + di) = (a.c - b.d) + (b.c + a.d).i$

Observese que la definición de multiplicación es consistente con la propiedad asignada a $\boldsymbol{i}$; a saber $\boldsymbol{i^2 = -1}$

En efecto, si se multiplica $(a + bi).(c + di)$ usando el álgebra ordinaria, se obtiene

$$a.c + i.(b.c + a.d) + i^2.(b.d)$$

Ahora, cuando se sustituye i^2 por -1, se llega a la fórmula de la definición.

Actividad:

Resolver las siguientes operaciones:

a) $(3 + 6i) + (2 - 3i) =$
b) $(7 + 5i) + (1 + 2i) =$
c) $(5 + 7i).(3 - 4i) =$
d) $(2 - 3i) + (-1 + 4i) =$

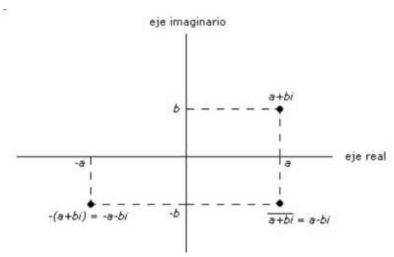
Tambien se debe considerar la división. Si se quiere expresar 1/(a+bi) como un número complejo, el mejor modo de conseguirlo es utilizando el **número complejo conjugado a-bi**.

Los números complejos **a+bi** y **a-bi** se llaman **conjugados**.

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2}$$

1.8.4. Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan en el plano de ARGAND. Para ello se consideran los ejes coordenados y se representan en el eje de abscisas la parte real del número complejo y en el eje de ordenadas la parte imaginaria. Así, dado el número complejo a+bi, su representación en el plano se corresponde con el punto dado por el par (a, b). Y recíprocamente, dado un punto en el plano definido por el par (a, b), este punto representa el numero complejo a+bi. Debido a la correspondencia biunívoca que se establece entre los números complejos y los puntos del plano, éste recibe el nombre de plano complejo, el eje de abscisas se llama eje real, y el eje de ordenadas, eje imaginario.



Unidad 2:

Polinomios.

2.1. CONSIDERACIONES GENERALES

2.1.1. Definición de polinomio

Polinomio de variable real "x" es toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$
$$donde\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0\ son\ números\ reales\ y\ n\ es\ natural$$

Identificamos las partes de un polinomio como:

Término principal — Término Cuadrático — Término Independiente

$$P(x) = \boxed{-5.x^3}\boxed{+3.x^2}\boxed{+2.x}\boxed{-2}$$

Coef. Ppal. — De grado 2 con coef. 3 — Término lineal de grado 1 con coef. 2

Cuatrinomio de grado 3, ordenado y completo

Ejemplo:

$R(x) = -8.x^3 + 6.x - \frac{1}{2}$ es un polinomio ordenado según el exponente de la variable "x" cuyos coeficientes son: $a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 6, a_2 = 0, a_3 = -8, a_4 = a_5 = \ldots\ldots = 0$

2.1.2. Valor numérico de un polinomio

Se denomina valor numérico de un polinomio P(x) con respecto a un número real α al número que se obtiene luego de efectuar operaciones en P(x) cuando se sustituye la variable "x" por α y se denota como P(α).

Ejemplo:

$T(x) = -3.x^4 + 6.x^3 - 2.x^2 + x - 2 \quad calculamos\ T(1)\ y\ T(-2)$

$T(1) = -3.1^4 + 6.1^3 - 2.1^2 + 1 - 2 = -3 + 6 - 2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{T(1) = 0}$

$T(-2) = -3.(-2)^4 + 6.(-2)^3 - 2.(-2)^2 + (-2) - 2 = -3.16 + 6.(-8) - 2.4 - 2 - 2 = \boldsymbol{-108}$

2.1.3. Grado de un polinomio

El grado de $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ es el mayor n natural tal que $a_n \neq 0$

Notación: $gr[P(x)] = n \Leftrightarrow a_n \neq 0 \wedge a_n\ se\ denomina\ \boldsymbol{coeficiente\ principal}$

Ejemplo:

- $P(x) = -3.x^4 + 6.x^3 - 2.x^2 + x - 2 \implies gr[P(x)] = 4 \; y \; coef.ppal \; a_4 = -3$
- $Q(x) = 5 \implies gr[Q(x)] = 0$
- $T(x) = 6.x + 1 \implies gr[T(x)] = 1$

2.1.4. Polinomio Nulo

Un polinomio es nulo cuando tiene todos sus coeficientes nulos, es decir iguales a cero.

$$\boxed{L(x) = 0 \; es \; el \; polinomio \; nulo \iff a_i = 0 \; \forall i, i \in \mathbb{R}}$$

- No existe el grado del polinomio nulo.
- El polinomio nulo admite infinitas raices.

2.1.5. Clasificación de los polinomios

- **Por el grado:** Pueden ser de primero, segundo, tercero, etc. Según el grado del término de mayor grado.
- **Por el número de términos:** Pueden clasificarse como monomios (1 término), binomios (dos términos), trinomios (3 términos), cuatrinomios (4 términos), etc.
- **Forma usual:** Indicamos el grado del polinomio y el número de términos.

Otra manera de clasificarlos es:

- Completos: Cuando poseen todos los términos que corresponden a su grado.
- Incompletos: Cuando falta algún término de los que le corresponden según su grado.

Así pues y de forma usual, para el siguiente ejemplo, diríamos trinomio incompleto de cuarto grado.

Ejemplo:

$$U(x) = \frac{3}{4}.x^2 - 5.x + 2$$

Importante:

Cuando trabajemos con polinomios, lo primero que hay que hacer es ordenarlos en sentido decreciente según su grado, luego reducir términos semejantes y por último, aunque no siempre es necesario, completarlos con ceros en el caso de que no esten completos.

- Ordenación

Consiste en colocar los términos unos a continuación de otros guardando el orden del grado del mismo.

- Reducción de términos semejantes

Consiste en sumar o restar todos los términos semejantes que se encuentren en la expresión.

- Completamiento

Consiste en intercalar términos con coeficiente nulo (cero) allí donde falte el término del grado que corresponda

Ejemplo 1:

$$P(x) = 2.x^2 - 5.x^4 + x + 3.x + 1 + x^5 - 3.x^3 - 3$$

Polinomio desordenado con términos semejantes.

$= x^5 - 5.x^4 - 3.x^3 + 2.x^2 + x + 3.x + 1 - 3$

Polinomio ordenado con términos semejantes.

$= x^5 - 5.x^4 - 3.x^3 + 2.x^2 + 4.x - 2$

Polinomio de quinto grado, ordenado y completo.

Ejemplo 2:

$P(x) = \frac{3}{2}.x^5 - 2.x + 3.x^3$

Polinomio de quinto grado incompleto.

$= \frac{3}{2}.x^5 + 3.x^3 - 2.x$

No hay términos semejantes para reducir.

$= \frac{3}{2}.x^5 + 0.x^4 + 3.x^3 + 0.x^2 - 2.x + 0$

Ya que por ser de quinto grado ha de tener 6 términos, le faltaban 3 términos que hemos completado con ceros.

Actividad:

En los siguientes casos, reduce términos semejantes, ordena y completa con ceros:

a) $P(x) = 3.x^2 - 4.x^5 + 3.x^4 - x^3 - 3 - x$
b) $Q(x) = 6.x^5 - 2x + 3.x^3 - 12 - 5.x^4$
c) $T(x) = 3.x^4 - 5.x^2 + 2.x^4 + 6.x - 7 + x^2 - 5.x + 2 + 7.x^2$

2.1.6. Número de términos de un polinomio

Un polinomio se dice que es completo cuando tiene todos los términos que le corresponden, pero, ¿Cuántos términos le corresponden a cada polinomio?

$Primer\ grado \Rightarrow dos\ términos\ a_1x + a_0$
$Segundo\ grado \Rightarrow tres\ términos\ a_2x^2 + a_1x + a_0$
$Tercer\ grado \Rightarrow cuatro\ términos\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

2.2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

2.2.1. Suma de polinomios

$$Sean\ P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\ \ y\ \ Q(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$La\ suma\ de\ P(x)\ y\ Q(x)\ es\ S(x) = \left(\sum_{i=0}^{i=m} a_i + b_i\right).x^i\ siendo\ m = máx\ n, k$$

S(x) por su forma es un polinomio cuyos coeficientes son los reales $a_i + b_i$. Esto significa que cada coeficiente del polinomio S(x) se obtiene sumando los coeficientes de los términos semejantes, es decir los términos de igual grado.

Definicion: *Polinomos opuestos.*

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ el polinomio opuesto de P(x) es:
$Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$
Al polinomio opuesto de P(x) lo anotaremos como –P(x).

2.2.2. Diferencia de polinomios

Dados los polinomios P(x) y Q(x), D(x) = P(x) – Q(x) ⇔ D(x) + Q(x) = P(x). Al polinomio D(x) lo llamamos diferencia entre P(x) y Q(x) y – es la sustracción entre polinomios.

2.2.3. Producto de polinomios

Dados los polinomios $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
y $B(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

El producto $A(x)\,.\,B(x)\ es\ P(x) = \sum_{i=0}^{i=n+k} c_i . x_i, donde\ c_i = \sum_{j=0}^{j=i} a_{i-j} . b_j$

Algunas consecuencias:

1) La multiplicación de polinomios da como resultado un único polinomio.

2) $\left.\begin{array}{r} gr[A(x)] = m \\ gr[B(x)] = n \end{array}\right\} \Rightarrow gr[A(x)\,.\,B(x)] = m + n$

3) P(x) . 0 = 0 y P(x) . 1 = P(x)

2.2.4. Divisibilidad de polinomios

Para dividir polinomios, el grado del polinomio divisor ha de ser igual o menor que el del polinomio dividendo.

El cociente de dos polinomios es otro polinomio que tiene por grado final la diferencia de los grados del dividendo menos el del divisor. El resto es también un polinomio cuyo grado ha de ser menor que el del divisor, y se cumple siempre la comprobación:

$$\boldsymbol{dividendo = cociente\,.\,divisor + resto}$$

Cuando hagamos divisiones, siempre ordenar (en sentido decreciente) y completar con ceros, tanto el polinomio dividendo como el divisor.

<u>Ejemplo 1:</u>

$$\begin{array}{l|l}
\textbf{Dividendo} & \textbf{Divisor} \\
2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 & \underline{x^2 + x} \\
\underline{-2x^3 - 2x^2} & 2x - 5 \\
0x^3 - 5x^2 - 5x & \textbf{Cociente} \\
\quad \underline{5x^2 + 5x} & \\
\quad 0x^2 + 0x - 5 & \textbf{Resto}
\end{array}$$

Se procede igual que si se tratara de números.
Así lo primero es buscar un número que multiplicado por el coeficiente del término de mayor grado del divisor, iguale éste con el del dividendo.
Luego una variable elevada a un exponente adecuado para que iguale el del dividendo.
Se multiplica todo el divisor por dicho monomio y el resultado se lleva restando bajo los términos correspondientes del dividendo. Se suman y se baja el siguiente término del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Este será el resto de la división. Finalmente se realiza la comprobación con las operaciones de polinomios vistas anteriormente.

En nuestro caso:

$2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 = [(2x - 5).(x^2 + x)] + (-5)$

<u>Ejemplo 2:</u>

Dividendo = $3x^4 - 5x^3 + 4x^2$
Divisor = x^2

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & x^2 \\ \cline{4-4}
\underline{-3x^4} & & & 3x^2 - 5x + 4 \\
0x^4 & -5x^3 & & \\
 & \underline{5x^3} & & \\
 & 0x^3 & +4x^2 & \\
 & & \underline{-4x^2} & \\
 & & 0x^2 & \text{——— Resto, es exacta.}
\end{array}
$$

Comprobamos:

$$(3x^2 - 5x + 4)\ .\ (x^2) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \text{ c.q.d.}$$

En estos casos lo que hacemos no es más que aplicar el proceso de simplificación de fracciones, ya que:

$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2):(x^2) = \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2} = 3x^2 - 5x + 4$

Conclusion: *Dividir un polinomio por un monomio no es mas que simplificar la fracción algebraica correspondiente.*

<u>Ejemplo 3:</u>

Polinomios incompletos entre si:

Dividendo = $x^6 - 3x - x^3 - 3$
Divisor = $-3 + x^2$

Primero y antes que nada, hay que ordenar y completar los polinomios:

$(x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3):(x^2 + 0x - 3)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^6 - 0x^5 + 3x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^4 + 3x^2 - x + 9 \\
0x^6 + 0x^5 + 3x^4 - x^3 + 0x^2 \qquad\qquad & \\
\underline{-3x^4 + 0x^3 + 9x^2} \qquad\qquad & \\
0x^4 - x^3 + 9x^2 - 3x \qquad & \\
\underline{x^3 + 0x^2 - 3x} \qquad & \\
0x^3 + 9x^2 - 6x - 3 & \\
\underline{-9x^2 + 0x + 27} & \\
0x^2 - 6x + 24 & \text{——— Resto}
\end{array}
$$

Comprobación: $x^6 - 3x - x^3 - 3 = [(x^2 - 3).(x^4 + 3x^2 - x + 9)] + (-6x + 24)$

Conclusión: *es fundamental ordenar (en sentido decreciente) y completar los polinomios, dividendo y divisor, antes de hacer la división. Además, fíjate en que el número de términos a dividir en cada paso ha de ser igual al* *número de términos del divisor, luego el paso de bajar términos no es necesariamente término a término. Como puedes ver, en el segundo paso hemos bajado dos términos simultáneamente.*

2.2.4.1. **Teorema del Resto** (Valor numérico de un polinomio)

El resto de dividir un polinomio P(x) por un binomio de la forma $(x \pm a)$ es igual al valor numérico que toma el polinomio al sustituir "x" por $\pm a$.

Ejemplo:

$P(x) = 3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 \; y \; Q(x) = (x - 2)$

El resto de la división $P(x){:}\,Q(x)$ será $P(2)$

Luego: $P(2) = 3.2^4 - 8.2^2 + 5.2 - 1 = 48 - 32 + 10 - 1 = \mathbf{25}$

2.2.4.2. **Regla de Ruffini**

Cuando el divisor sea un binomio, podemos aplicar una regla muy sencilla que consiste en lo siguiente. Sea el polinomio divisor $(x - 2)$, y el polinomio dividendo $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1$, para hacer la división por la regla de Ruffini, hay que realizar los siguientes pasos:

- Ordenar (en sentido decreciente) y completar con ceros el polinomio dividendo.

$$3x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 5x - 1$$

- Se escriben en fila los coeficientes del polinomio dividendo en el mismo orden en que se encuentran en el polinomio.

$$3 \quad 0 \quad -8 \quad 5 \quad -1$$

- En el extremo izquierdo, y en segunda fila, se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

- A la tercer fila se baja el primer coeficiente del dividendo, tal como esta.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

- Se multiplica éste por el opuesto del término independiente del divisor y el resultado se sitúa debajo del segundo coeficiente del dividendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última fila a la derecha del primer coeficiente.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & & & \\ \hline & 3 & 6 & & & \end{array}$$

- Se multiplica, de nuevo, ése resultado por el opuesto del término independiente del divisor, y el resultado se sitúa debajo del tercer coeficiente del dividendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última fila a la derecha del resultado anterior, y así sucesivamente hasta completar todos los términos del polinomio.

  El último valor de la última fila es el resto de la división, en este caso es 25, y los números anteriores de la última fila son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en sentido decreciente, así:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & 12 & 8 & 26 \\ \hline & 3 & 6 & 4 & 13 & \mathbf{25} \end{array}$$

$$Cociente: 3x^3 + 6x^2 + 4x + 13 \qquad Resto: 25$$

Comprobación: $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 = [(3x^3 + 6x^2 + 4x + 13).(x-2)] + 25$

Actividad:

Realiza las siguientes divisiones por distintos métodos.

a) $(x^3 - 5x^2 + 6x - 3):(x-2)$

b) $(x^4 - 3x^2 + 7):(x-3)$

c) $(x^5 - 4x^3 + 6x - 8):(x+1)$

d) $\left(x + \frac{3}{2}x^4 + 2x^5 - \frac{13}{4}x^3\right):\left(x - \frac{1}{2}\right)$

2.3. TRANSFORMACIONES DE UN POLINOMIO EN UN PRODUCTO

Factorizar un polinomio P significa transformarlo en el producto de una constante por uno o mas polinomios primos de coeficiente principal igual a uno. Veremos a continuación algunos casos sencillos de factorización.

2.3.1. Extracción del factor común

I. $A.M + B.M = M.(A+B)$

Ejemplos: $(4x - 20) = 4.(x-5)$

$2x^3 - 8x^2 + 16x = 2x.(x^2 - 4x + 8)$

II. $A.P + B.P + A.Q + B.Q = P.(A+B) + Q.(A+B) = (P+Q).(A+B)$

Ejemplo: $6xy + 15y - 8x^2 - 20x = 3y.(2x+5) - 4x.(2x+5) = (3y - 4x).(2x+5)$

2.3.2. Diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$$

Ejemplos:

$(x^2 - 9) = x^2 - 3^2 = (x+3).(x-3)$

$(4x^2 - 25) = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5).(2x-5)$

2.3.3. Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

Ejemplos:

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3.x + 3^2 = (x+3)^2$

$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2.4.x + 4^2 = (x-4)^2$

2.3.4. Cuatrinomio cubo perfecto

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$$
$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$$

2.3.5. Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases

Se puede verificar fácilmente si se analiza:

1) $x^n + a^n \qquad es\ divisible\ por\ (x+a)\ si\ \boldsymbol{n}\ es\ \boldsymbol{impar}$

2) $x^n + a^n$ $\quad$ $nunca\ es\ divisible\ por\ (x-a)$
3) $x^n - a^n$ $\quad$ $es\ divisible\ por\ (x+a)\ si\ \boldsymbol{n}\ es\ \boldsymbol{par}$
4) $x^n - a^n$ $\quad$ $siempre\ es\ divisible\ por\ (x+a)$

2.4. RAIZ DE UN POLINOMIO

Se dice que un valor x = a es raíz de un polinomio P(x), cuando al sustituir dicho valor en el polinomio, el resultado es 0; es decir, cuando P(a) = 0. Las raíces de un polinomio, también se llaman ceros del polinomio.

$$\boxed{\alpha\ es\ raíz\ de\ P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0}$$

2.4.1. Raices particulares de un polinomio

- 0 es raíz de un polinomio si y solo si el término independiente es cero.
- 1 es raíz de un polinomio si y solo si la suma de los coeficientes es cero.
- -1 es raíz de un polinomio si y solo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar.

2.4.2. Raices comunes

Definición: Combinación lineal de pollinomios:

Sean P(x) y Q(x) polinomios, a y b números reales cualesquiera. Al polinomio:

L(x) = a.P(x) + b.Q(x)

Le llamamos *combinación lineal de P(x) y Q(x)*.

Observaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\ es\ raíz\ de\ P(x) \\ \alpha\ es\ raíz\ de\ Q(x) \\ L(x) = a.P(x) + b.Q(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\ es\ raíz\ de\ L(x)$$

Es decir, si α es raíz de dos polinomios, entonces α es raíz de cualquier combinación lineal entre ellos.

2.4.3. Relaciones entre coeficientes y raices

- POLINOMIO DE PRIMER GRADO

$$sea\ P(x) = a_1x + a_0\ con\ a_1 \neq 0\ y\ \alpha\ raíz\ de\ P(x)$$

$$\left.\begin{array}{r} Por\ \ D.F. \Rightarrow P(x) = a_1.(x-\alpha) = a_1x - a_1\alpha \\ P(x) = a_1x + a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a_1\alpha = a_0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{a_0}{a_1}}$$

- POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO

$$sea\ P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\ con\ a_2 \neq 0, \alpha\ y\ \beta\ raíces\ de\ P(x)$$

$$\left.\begin{array}{r} Por\ D.F. \Rightarrow P(x) = a_2.(x-\alpha).(x-\beta) = a_2x^2 - a_2\alpha x - a_2\beta x + a_2\alpha\beta \\ P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -a_2.(\alpha+\beta) = a_1 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{a_1}{a_2} \\ a_2\alpha\beta = a_0 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{a_0}{a_2} \end{array}\right.$$

- POLINOMIO DE TERCER GRADO

$$sea\ P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_3 \neq 0, \alpha, \beta\ y\ \gamma\ raíces\ de\ P(x)$$

Utilizando un razonamiento análogo a los anteriores, tenemos:

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a_2}{a_3}\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{a_1}{a_3}\\ \alpha\beta\gamma=-\frac{a_0}{a_3}\end{gathered}}$$

2.4.4. Casos que se reducen a ecuaciones de segundo grado

2.4.4.1. Polinomios ciclotónicos

Son de la forma $P(x) = ax^{2n} + bx^n + c\ con\ a \neq 0\ y\ n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

$si\ n = 1 \Longrightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$

$si\ n = 2 \Longrightarrow P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ Polinomio bicuadrado

$si\ n = 3 \Longrightarrow P(x) = ax^6 + bx^3 + c$ Polinomio bicúbico

Para hallar las posibles raíces reales de cualquier polinomio ciclotónico, debemos resolver la ecuación $ax^{2n} + bx^n + c$ que podemos escribir como:

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0$$

Si aplicamos un cambio de variable diciendo que $\boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{z} \Longrightarrow$ el polinomio anterior nos queda:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Esta transformación es ventajosa, pues llevamos la primera ecuación que no sabíamos resolver, a una ecuación de resolución conocida.

2.4.4.2. Polinomios simétricos

Un polinomio es simétrico si y solo si, los coeficientes de los términos “equidistantes” de los extremos, son iguales.

Ejemplo:

Un polinomio simétrico de grado 5 es:

$$A(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$$

Un polinomio simétrico de grado 4 es:

$$B(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

Observaciones:

- No admiten la raíz 0.
- -1 es raíz si el grado es impar.
- Si admite la raíz α, entonces tambien admite la raíz 1/α.
- Si es de grado impar, al dividirlo por (x+1), obtenemos un polinomio simétrico.

Raíces de polinomios simétricos de 4° grado

Para hallar las posibles raíces de un polinomio de 4° grado: $S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, resolvemos la ecuación: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ **(1)**. Transformemos (1) en una ecuación que nos permita saber cuál es el cambio de variable conveniente.

Como (1) no admite raíz 0, tenemos que: $x^2.\left(ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0$, por lo tanto,
$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Longrightarrow a.\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b.\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ **(2)**. Si en ésta última expresión, efectuamos el cambio de variable $\boldsymbol{x + \frac{1}{x} = z}$ nos queda $\boldsymbol{z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}}$, luego, realizando la sustitución en (2) obtenemos: $a.(z^2 - 2) + bz + c = 0$, que ordenando según z: $\boldsymbol{az^2 + bz + c - 2a = 0}$ **(3)**. Esta ecuación admite a lo sumo, dos raíces reales distintas: $z_1\ y\ z_2$.

Entonces, "deshaciendo" el cambio de variable efectuado: $x + \frac{1}{x} = z_1 \Longrightarrow x^2 + 1 = z_1x \Leftrightarrow x^2 - z_1x + 1 = 0$ **(4)**, y $x + \frac{1}{x} = z_2 \Longrightarrow x^2 + 1 = z_2x \Leftrightarrow x^2 - z_2x + 1 = 0$ **(5)**.

Cada una de las ecuaciones (4) y (5) admiten a lo sumo, dos raíces reales distintas, que son las raíces de la ecuación (1).
Por lo tanto:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \longrightarrow cambio\ de\ variable\ x + \frac{1}{x} = z \longrightarrow az^2 + bz + c - 2a = 0$$

2.4.4.3. Polinomios hemisimétricos

Un polinomio es hemisimétrico si y solo si, los coeficientes de los términos "equidistantes" de los extremos son opuesto.

Ejemplo:
Un polinomio hemisimétrico:

$$H(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a$$

- No admiten la raíz 0.
- 1 es raíz, si el grado es impar.
- Si admite la raíz α, tambien admite la raíz 1/α.
- Si el grado es impar, al dividirlo por (x-1) obtenemos un polinomio simétrico.

2.5. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Llamaremos *expresiones algebraicas fraccionarias o racionales* a las de la forma $\frac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)\ y\ B(x)$ son polinomios de variable x, y $B(x) \neq 0$.

Por ejemplo, $\frac{7}{x-2}$ es una expresión algebraica racional porque el numerador A(x) = 7 es un polinomio y el denominador B(x) = (x-2) tambien es un polinomio.

Tambien es una expresión algebraica racional $\longrightarrow \frac{x^3-2x+\sqrt{3}}{x^2+7x}$

¿Es $\frac{x^5+3x^3}{\sqrt{x-3}}$ una expresión algebraica racional?..
....

La expresión (x^2-9) es tambien una expresión algebraica racional porque (x^2-9) es un polinomio y su denominador igual a 1, tambien lo es.

2.5.1. Simplificación de expresiones racionales

Recordamos que, dado el racional $\frac{2}{3}$ podemos hallar otros equivalentes con él: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{14}{21}$……..
donde $\frac{a}{b}=\frac{a.n}{b.n}\ con\ n\neq 0$

Análogamente para la expresión racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ pueden hallarse expresiones racionales equivalente:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x).N(x)}{B(x).N(x)}\ siendo\ N(x)\ cualquier\ polinomio\ no\ nulo.$$

En $\mathbb{Z}$ muchas veces se nos presenta el problema de encontrar la fraccion equivalente mas simple que una dada. Por ejemplo: $\frac{77}{132}=\frac{7.\cancel{11}}{2^2.3.\cancel{11}}=\frac{7}{12}$

Tambien es posible simplificar expresiones algebraicas racionales cuando *existen factores comunes al numerador y al denominador*, de lo contrario, la expresión racional es *irreducible.*

Consideremos: $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-x-3}$ Factorizamos su numerador y su denominador.

$$x^2-1=(x+1).(x-1)$$
$$x^3+3x^2-x-3=x^2.(x+3)-(x+3)=(x+3).(x^2-1)=(x+1).(x-1)$$

Entonces: $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{\cancel{(x+1)}.\cancel{(x-1)}}{(x+3).\cancel{(x+1)}.\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{x+3}\iff \boldsymbol{x\neq 1\ y\ x\neq -1}$

Luego, las dos expresiones racionales $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-x-3}\ y\ \frac{1}{x+3}$ son **equivalentes** $\forall\ \boldsymbol{x\neq 1\ y\ x\neq -1}$

La expresión final es equivalente a la dada para todo valor de x que no anule el factor cancelado, ya que ello equivaldría a dividir por cero, lo cual matemáticamente no existe.

Veamos otros ejemplos:

1) $\frac{3x^3-12x}{x^2-4x+4}=\frac{3x.(x^2-4)}{(x-2)^2}=\frac{3x.(x+2).\cancel{(x-2)}}{(x-2).\cancel{(x-2)}}=\frac{3x.(x+2)}{(x-2)}\quad \forall\ x\neq 2$

2) $\frac{x^2+5}{x^4-25}=\frac{x^2+5}{(x^2+5).(x^2-5)}=\frac{1}{x^2-5}\quad \forall\ x\in\mathbb{R}$ ¿Por qué esta igualdad es válida para cualquier número real?
………………………………………………………………………………………………

Actividad:

Simplificar, indicando para que valores de x la expresión resultante es equivalente a la dada.

a) $\frac{2x-6}{x^2-6x+9}$ b) $\frac{x^2+x}{x+1}$ c) $\frac{x^3-49x}{x^3-14x^2+49x}$ d) $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$

2.5.2. Operaciones con expresiones algebraicas racionales

Para operar con expresiones racionales, aplicamos las mismas propiedades y técnicas que para operar con fracciones numéricas.

2.5.2.1. Adición y sustracción

Recordamos que para sumar $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}$ necesitamos hallar fracciones equivalentes a los sumandos, de igual denominador: $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}=\frac{3}{2.7}+\frac{1}{3.7}=\frac{3.3+1.2}{2.3.7}=\frac{11}{42}$

Para sumar (o restar) expresiones racionales de distinto denominador, debemos sumar (o restar) expresiones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Para hallarlo, factorizamos los denominadores y luego multiplicamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con el que figura (mínimo común múltiplo).

Veamos el siguiente ejemplo: $\frac{2}{3x^2-6x+3}+\frac{x}{x^2+3x-4}$

Factorizamos los denominadores:

$$\frac{2}{3.(x^2-2x+1)}+\frac{x}{(x-1).(x+4)}=\frac{2}{3.(x-1)^2}+\frac{x}{(x-1).(x+4)}=$$

Buscamos expresiones equivalentes con igual denominador:

$$=\frac{2.(x+4)}{3.(x-1)^2.(x+4)}+\frac{3.x.(x-1)}{3.(x-1)^2.(x+4)}=$$

Operamos en el numerador y sumamos:

$$=\frac{2x+8+3x^2-3x}{3.(x-1)^2.(x+4)}=\frac{3x^2-x+8}{3.(x-1)^2.(x+4)}$$

El numerador no tiene raíces reales, por lo tanto la expresión obtenida es irreducible.

Vamos a calcular ahora: $\frac{x-10}{x^2+3x-10}-\frac{2x+4}{x^2-4}$

Factorizamos los denominadores:

$$\frac{x-10}{(x-2).(x+5)}-\frac{2x+4}{(x+2).(x-2)}=$$

Elegimos un denominador común y hallamos las expresiones equivalentes:

$$=\frac{(x-10).(x+2)}{(x-2).(x+5).(x+2)}-\frac{(2x+4).(x+5)}{(x-2).(x+5).(x+2)}=$$

Aplicamos propiedades y restamos:

$$=\frac{x^2+2x-10x-20}{(x-2).(x+5).(x+2)}-\frac{2x^2+10x+4x+20}{(x-2).(x+5).(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2-8x-20-2x^2-14x-20}{(x-2).(x+5).(x+2)}=$$

$$=\frac{-x^2-22x-40}{(x-2).(x+5).(x+2)}=\frac{-(x+20).(x+2)}{(x-2).(x+5).(x+2)}=\frac{-(x+20)}{(x-2).(x+5)}$$

La suma de expresiones algebraicas racionales es asociativa, conmutativa, cumple la ley de cierre y posee elemento neutro = 0. Recordemos que restar, es sumar el opuesto.

Actividad:

Calcular las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{x+1}{x^2+6x+9}-\frac{1}{3-x}=$

b) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{(x+1)^2}=$

c) $\frac{x+5}{x^2-25}+\frac{x+2}{2x^2-6x-20}-\frac{21}{2x+2}=$

2.5.2.2. Multiplicación

Para multiplicar dos expresiones racionales $\frac{A(x)}{B(x)}\ y\ \frac{C(x)}{D(x)}$, procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{A(x)}{B(x)}.\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x).C(x)}{B(x).D(x)}$$

Ejemplo:

a)

$$\frac{2x+1}{x-3}.\frac{3x}{x+1}=\frac{3x.(2x+1)}{(x-3).(x+1)}=\frac{6x^2+3x}{x^2-2x-3}$$

b)

$$\frac{-x^2+4x}{x^2-9}.\frac{5x+15}{x^3-4x^2}=\frac{(-x^2+4x).(5x+15)}{(x^2-9).(x^3-4x^2)}=$$

Factorizamos cada uno de los polinomios:

$$=\frac{-x.(x-4).5.(x+3)}{(x+3).(x-3).x^2.(x-4)}=$$

Simplificamos y obtenemos el resultado:

$$\frac{-5}{x.(x-3)}\quad \forall\, \boldsymbol{x\neq 4\ y\ x\neq -3}$$

La multiplicación de expresiones algebraicas racionales cumple con la ley de cierre, es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro = 1 y es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

¿Existe inverso multiplicativo para toda expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$?

……

Actividad:

Resolver las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\frac{x^2-4x+4}{2x}.\frac{6x-12}{x^3-6x^2+12x-8}=$

b) $(x^3+1).\frac{x+1}{x^2-x+1}.\frac{1}{x^2+2x+1}$

2.5.2.3. División

Se llama inverso multiplicativo de una expresión algebraica racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ a la expresión $\frac{B(x)}{A(x)}$, si A en no nulo.

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales $\frac{A(x)}{B(x)}\ y\ \frac{C(x)}{D(x)}$ operamos igual que en el conjunto $\mathbb{Q}$:

$$\frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}.\frac{D(x)}{C(x)}=\frac{A(x).D(x)}{B(x).C(x)}\ con\ C(x)\neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{x-1}{3-x}:\frac{2x}{x+2}=\frac{(x-1).(x+2)}{2x.(3-x)}=\frac{x^2+x-2}{6x-2x^2}$$

Actividad:

1) Con las expresiones $P(x)=\frac{2x+4}{x^2-9}$ $y\ T(x)=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ *calcular:*

a) P(x) . T(x)
b) P(x) : T(x)
c) T(x) : P(x)

2) Resolver:

a) $\frac{x^2-4}{x^2-9}:\ \frac{x^4-16}{x+3}=$

b) $\frac{5x+10}{x^2-1}:\ \frac{3x+6}{x+1}=$

c) $\left(\frac{x+4}{x^2-1}.\frac{-x+1}{x^2+1}\right):\ \frac{-x^2-3x+4}{x^4-1}=$

Actividad:

Efectuar las siguientes operaciones combinadas.

a) $\left(\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{x+2}{x^2-x-6}\right).\frac{x^2-9}{4x+10}=$

b) $\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right):\frac{4}{x^2-4}=$

Unidad 3:

Ecuaciones.

3.1. INTRODUCCION

Igualdad: es la expresión en la cual dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplo:

$$a = b + c$$

Al ser una igualdad, se satisface para cualquier valor que tomen las variables que en ella figuren.

Ecuación: es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas (incógnitas) y una o varias cantidades conocidas (datos), y que solo verifican o es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Los números conocidos pueden ser coeficientes o constantes y las incógnitas por lo general se representan con alguna de las últimas letras del abecedario, x, y o z.

Ejemplo:

$$5x + 2 = 7$$

Se denomina primer miembro de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad y segundo miembro a la expresión que se encuentra a la derecha de éste signo.

Ejemplo:

Primer miembro **Términos del segundo miembro**

$$3x - 5 = 2x + 3$$

Términos del primer miembro **Segundo miembro**

Término: son cada una de las cantidades que están conectadas por el signo + o -.

Grado de una ecuación: es el exponente mayor que tiene la incógnita de la ecuación.

Raíces o soluciones de una ecuación: son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación.

Propiedades de la igualdad

Para cualesquiera números reales a, b y c, se tiene que:

a) $Si\ a = b \Longrightarrow a + c = b + c$ Propiedad de adición
b) $Si\ a = b \Longrightarrow a - c = b - c$ Propiedad de sustracción
c) $Si\ a = b \Longrightarrow a.c = b.c$ Propiedad de multiplicación
d) $Si\ a = b \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ Propiedad de división

3.2. SOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

3.2.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

La solución de ecuaciones de primer grado puede realizarse mediante la regla práctica que se muestra a continuación, la cual es simplemente la aplicación de las propiedades de igualdad.

<u>Regla práctica para resolver ecuaciones de primer grado</u>

1) Se efectúan las operaciones indicadas (si las hay).
2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan a la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4) Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

<u>Ejemplo:</u>

Resolver la ecuación $2x + 5 = 11$

$2x + 5 = 11$ trasladamos el 5 al segundo miembro
$2x = 11 - 5$ realizamos operaciones
$2x = 6$ trasladamos el 2 dividiendo al segundo miembro
$x = \frac{6}{2}$ realizamos la operación indicada
$\boldsymbol{x = 3}$

Comprobación:

$2x + 5 = 11$ sustituimos el valor encontrado
$2.(3) + 5 = 11$ realizamos operaciones
$\mathbf{11 = 11}$ c.q.d.

<u>Ejemplo:</u>

Resolver la ecuación $6x + 5 = 3x + 17$

$6x + 5 = 3x + 17$
$6x - 3x = 17 - 5$
$3x = 12$
$x = \frac{12}{3}$
$\boldsymbol{x = 4}$

Comprobación:

$6x + 5 = 3x + 17$
$6.(4) + 5 = 3.(4) + 17$
$24 + 5 = 12 + 17$
$\mathbf{29 = 29}$ c.q.d.

Actividades:

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1) $5x = 8x - 15$
2) $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
3) $9x - 11 = -10 + 12x$
4) $11x + 5x - 1 = 65x - 36$

5) $5x + 6 = 10x + 5$

3.2.2. Ecuaciones fraccionarias

Cuando se tienen ecuaciones que involucran fracciones, se puede aplicar el procedimiento anterior, adicionando un paso anterior, que es el de eliminar las divisiones, lo cual se hace por medio de multiplicaciones, por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación:

$$\frac{x-3}{x+2} = \frac{x-2}{x+8} \Longrightarrow$$

Si la expresión $(x+8)$ la pasamos multiplicando a la expresión $(x-3)$, la expresión $(x+2)$ la pasamos a multiplicar por $(x-2)$ se llega a:

$$(x+8).(x-3) = (x+2).(x-2)$$

Realizando operaciones:

$$x^2 + 8x - 3x - 24 = x^2 + 2x - 2x - 4$$

Simplificando:

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

Actividad:

Hallar el valor de "x" en las siguientes ecuaciones.

a)	$\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$	b)	$\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$
c)	$x - \frac{x+2}{12} = \frac{5x}{2}$	d)	$\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$
e)	$x - \frac{5x-1}{3} = 4x - \frac{3}{5}$	f)	$\frac{3x+5}{5} = 2x - 6$
g)	$\frac{x+4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2x-2}{3}$	h)	$\frac{4x+6}{6} = 12 - 3x$
i)	$\frac{2x-5}{4x-1} = \frac{3x-4}{6x+9}$	j)	$\frac{6x-8}{9x+8} = \frac{2x-3}{3x+2}$

3.2.3. Solución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita

Pasos para la solución de problemas de planteo

1) Interpretar correctamente el significado de la expresión hablada o escrita, asignando a las variables o incógnitas las últimas letras del alfabeto (x, y, z).
2) Escribir la expresión o expresiones algebraicas procurando referir todas las variables a una sola que pudiera llamarse "x".
3) Relacionar la información ya simbolizada para establecer una ecuación o inecuación.
4) Resolver la ecuación o inecuación.
5) Interpretar la solución algebraica en términos del lenguaje ordinario, comprobando que satisface las condiciones estipuladas.

Ejemplos:

a) Hallar 3 números consecutivos, tales que el duplo del menor mas el triplo del mediano mas el cuádruplo del mayor equivalga a 740.
   Solución:

Sea x el primer número o menor.
x+1 el segundo número o el mediano.
x+2 el tercer número o el mayor.

En base a las características expuestas en el texto, tenemos que:

$$2x + 3.(x + 1) + 4.(x + 2) = 740$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$2x + 3x + 3 + 4x + 8 = 740$$

Simplificando:

$$9x = 740$$

De aquí tenemos que $x = 81$, por lo tanto los números son:

Primero: 81
Segundo: 81+1 = 82
Tercero: 81+2 = 83

b) Juan tenia $85. Gasto cierta suma y la que le quedó es el cuadruplo de la que gasto. ¿Cuánto gasto Juan?

Solución:

Sea x la cantidad que gastó Juan.

$$85 - x = 4x$$

Aplicando las reglas para resolver ecuaciones de primer grado tenemos que:

$85 = 5x$ de aquí vemos que $x = \frac{85}{5} = 17$. Por lo que se ve que Juan gastó 17 pesos.

3.2.4. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que contienen 2 o mas incógnitas. Para que un sistema de ecuaciones se pueda resolver es necesario que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas.

Ejemplo:

5 trajes y 3 sombreros cuestan $4180, en tanto que 8 trajes y 9 sombreros cuestan $6940. ¿Cuál es el precio de un solo traje y un solo sombrero?

Debido a las condiciones del problema, no es tan fácil expresarlo en términos de una sola incógnita, por lo que usaremos dos incógnitas:

Sea:

$x = precio\ por\ traje$
$y = precio\ por\ sombrero$

Como 5 trajes y 3 sombreros cuestan $4180 se puede plantear la siguiente ecuación:

$$5x + 3y = 4180$$

Con la otra condición del problema se puede plantear una segunda ecuación:

$$8x + 9y = 6940$$

Hemos obtenido dos ecuaciones, a las cuales llamaremos sistema de ecuaciones de primer grado con dos incónitas, a continuación se mencionarán los principales métodos para la solución de éste tipo de ecuaciones.

3.2.4.1. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

3.2.4.1.1. METODO DE SUMAS Y RESTAS

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (\mathbf{1}) \\ x + 2y = 8 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Trataremos de sumar la ecuación (1) con la (2) de tal forma que al efectuarse la operación se obtenga una tercera ecuación que no contenga alguna de las incógnitas. A saber:

$$\begin{array}{c} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \\ \hline 3x + 3y = 15 \end{array}$$

Se puede apreciar que al realizar directamente la operación de suma, se genera una tercera ecuación la cuál contiene las dos incógnitas.
Trataremos de buscar otra alternativa. Por ejemplo, si multiplicamos toda la ecuación por (-2) nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ (-2).(x + 2y = 8) \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación y sumamos:

$$\begin{array}{c} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x - 4y = -16 \end{cases} \\ \hline 0x - 3y = -9 \end{array}$$

Ahora el resultado es una ecuación de primer grado con solo 1 incógnita "y". Resolvemos y obtenemos:

$$\boldsymbol{y = 3}$$

Del sistema de ecuaciones original, conocemos ahora el valor de "y", el cual podemos ahora sustituir en cualquiera de las dos (1) o (2). Por ejemplo si lo sustituimos en la ecuación (1) nos dá:

$$2x + (\mathbf{3}) = 7$$

Se observa que se forma una ecuación de primer grado con una sola incógnita "x" que resolviendo obtenemos:

$$2x = 7 - 3$$
$$x = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

Hemos obtenido la solución a nuestro sistema de ecuaciones, procedemos a continuación a realizar la comprobación, procurando que ésta se haga utilizando la ecuación distinta a la que fue usada en la sustitución, en éste caso la ecuación (2).

$$x + 2y = 8$$
$$(2) + 2.(3) = 8$$
$$\mathbf{8 = 8} \qquad \text{c.q.d}$$

<u>Recapitulando:</u>

1) Sumar la ecuación (1) con la (2) de tal manera que se elimine alguna de las incógnitas. Se puede multiplicar las ecuaciones por algún factor que asegure tener los mismos coeficientes pero con signos contrarios.
2) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene del paso anterior.
3) Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones originales.
4) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que resulta del paso anterior.
5) Realizar la comprobación.

Actividad:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sumas y restas.

a) $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ 15x + 10y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 5x + 3y = -19 \end{cases}$

3.2.4.1.2. METODO DE SUSTITUCION

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 & (\mathbf{1}) \\ 3x - y = 5 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Si despejamos "y" de la ecuación (2) tenemos:

$$y = 3x - 5$$

El valor de "y" es el mismo en la ecuación (1) y (2) por lo que se puede sustituir el valor encontrado de "y", obtenido de la ecuación (2), en la ecuación (1), de forma que:

$$5x + 3y = 13$$

Pero $y = 3x - 5$

Entonces:

$$5x + 3.(3x - 5) = 13$$

Realizando la manipulación algebraica se obtiene:

$$5x + 9x - 15 = 13$$

Como vemos, obtuvimos una ecuación de primer grado con una incógnita, la cuál se resuelve para dar:

$$14x = 28$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

Debido a que hemos encontrado en valor de "x", lo podemos sustituir en la ecuación (2) para obtener el valor de "y":

$$3x - y = 5$$
$$3.(2) - y = 5$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Realizando la comprobación en la ecuación (1) se tiene que:

$$5x + 3y = 13$$
$$5.(2) + 3.(1) = 13$$
$$\mathbf{13 = 13} \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>Recapitulando:</u>

1) Despejar alguna variable de cualquiera de las dos ecuaciones.
2) Sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación.
3) Realizar operaciones y resolver la ecuación de primer grado que resulta
4) Sustituir el valor encontrado en la expresión donde se despejo la primera varibale y realizar operaciones, con el objeto de conocer el valor de la segunda incógnita.
5) Realizar la comprobación.

Actividad:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 6y = 8 \end{cases}$

3.2.4.1.3. METODO DE IGUALACION

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \qquad (\mathbf{1}) \\ 5x - 2y = 13 \qquad (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Si se despeja la incógnita "x" de la ecuación (1) se tiene:

$$x = 6 - 3y \qquad (\mathbf{3})$$

Si despejamos ahora a la misma incógnita "x" pero ahora de la ecuación (2) obtendremos:

$$x = \frac{13 + 2y}{5} \qquad (\mathbf{4})$$

Puesto que x = x podemos entonces igualar la expresión (3) con la expresión (4) para tener:

$$6 - 3y = \frac{13 + 2y}{5}$$

Se ha obtenido una ecuación de primer grado con una incógnita, la cuál podemos resolver de la siguiente manera:

$$5.(6 - 3y) = 13 + 2y$$
$$30 - 15y = 13 + 2y$$
$$30 - 13 = 2y + 15y$$
$$17 = 17y$$
$$\boldsymbol{y = 1}$$

Sustituimos el valor de "y" en la ecuación (3) con el objeto de encontrar el valor de "x":

$$x = 6 - 3y$$
$$x = 6 - 3.(1)$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

Realizamos la comprobación en la ecuación (1):

$$x + 3y = 6$$
$$(3) + 3.(1) = 6$$
$$\mathbf{6 = 6} \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>Recapitulando:</u>

1) Despejar cualquiera de las dos incógnitas de la ecuación (1).
2) Despejar la misma incógnita de la ecuación (2).
3) Igualar las expresiones despejadas.
4) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita encontrada.
5) Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las expresiones obtenidas al hacer los despejes con el fin de encontrar el valor de la segunda incógnita.
6) Realizar la comprobación.

Actividad:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

a) $\begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x+16y=7 \\ 4y-3x=0 \end{cases}$

3.2.4.1.4. METODO GRAFICO

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y=7 & \mathbf{(1)} \\ x-y=-1 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Si de la ecuación (1) se despeja la variable “y” se tiene:

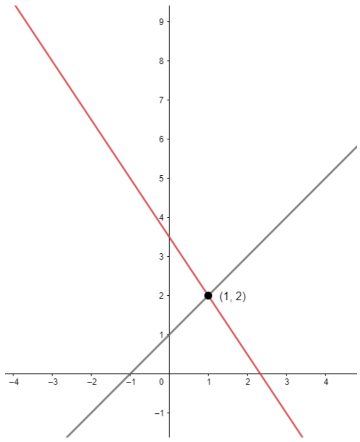
$$y=\frac{7}{2}-\frac{3x}{2}$$

Aquí podemos apreciar que obtenemos una función lineal de la forma $y=m.x\pm n$

Si repetimos el procedimiento de despejar la variable “y” de la ecuación (2) obtenemos:

$$y=x+1$$

Que tambien es una ecuación lineal.
Si ahora graficamos ambas en un mismo par de ejes cartesianos, obtenemos la solución.



Se aprecia que ambas rectas se cortan en un punto **P**: (x ; y), en donde $x=1$ y $y=2$. Estos valores corresponden a la solución del sistema de ecuaciones.

<u>Recapitulando:</u>
1) Despejar la variable “y” de ambas ecuaciones.
2) Graficar la función lineal asociada con la ecuación (1) y (2).
3) Encontrar el punto de intersección entre ambas rectas, el cuál será la solución buscada.

3.3. SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es toda aquella en la cuál, una vez simplificada, el mayor exponente de la variable es el 2. Básicamente es un polinomio de segundo grado en el cuál hay que averiguar el valor de su incógnita.

Ejemplo:

Son de la forma de una ecuación llamada **cuadrática** de fórmula general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para poder hallar los valores que toma su incógnita "x", siempre será necesario igualarla a 0.

3.3.1. Métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado

3.3.1.1. Método de la fórmula general (Bhaskara).

Una ecuación de segundo grado tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de esta ecuación consiste en encontrar el o los valores de "x" que la satisfagan.

A continuación, vamos a despejar "x":

Dividiendo cada término por "a":

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Dejamos en el primer miembro solo aquellos términos que contengan a la "x":

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Formando un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b/a}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b/a}{2}\right)^2$$

Factorizando:

$$\left(x + \frac{b/a}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Pasando el exponente al miembro derecho en forma de raíz:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Despejando a "x":

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Realizando la operación indicada dentro del radical:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Simplificando:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Factorizando:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b, c, son los coeficientes de la función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplo:

Sea la ecuación cuadrática $3x^2 - 5x + 2 = 0$ determinar el o los valores de “x” que satisfaga la igualdad.

Solución:

Aplicamos la fórmula general siendo los valores de los coeficientes: $a = 3, b = -5\ y\ c = 2$. Sustituimos estos valores y nos queda:

$$x_1; x_2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.(3).(2)}}{2.(3)}$$

Simplificando tenemos que:

$$x_1; x_2 = \frac{5 \pm 1}{6}$$

Como se puede apreciar, en la fórmula aparece el signo $\pm$ el cual indica que vamos a tener dos soluciones, la primera utilizando el signo + y la segunda utilizando el signo -. Por lo cual:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{5+1}{6} = \mathbf{1}\ y\ \boldsymbol{x_2} = \frac{5-1}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

3.3.1.2. Método de factorización

Este método consiste en factorizar la expresión de nuestra ecuación cuadrática, la cuál es un trinomio cuadrado perfecto, en un producto de binomios.

Una vez que se obtiene el producto de binomios, se procede a igualar cada factor a 0 y asi encontrar el valor de cada una de las soluciones.

Ejemplo:

Sea la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$, determinar el valor de su incógnita por el método de factorización.

Solución:

Este trinomio lo podemos factorizar como:

$$(x-3).(x+2) = 0$$

Cuando se multiplican dos factores y su resultado da 0, significa que al menos 1 de los factores debe ser igual a 0 para cumplir con la igualdad, con este criterio hacemos:

$$(x-3) = 0 \vee (x+2) = 0 \implies \boldsymbol{x_1} = \mathbf{3} \wedge \boldsymbol{x_2} = \mathbf{-2}$$

Obteniendo de ésta manera, las dos soluciones de la ecuación.

3.3.2. Discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado

Las raíces $x_1\ y\ x_2$ de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0, \forall\ a \neq 0$, son aquellos valores que reemplazados en la ecuación, da como resultado 0 y dependen fundamentalmente del discriminante Δ, siendo:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Este discriminante, es el valor que se encuentra como radicando en la fórmula general de Bhaskara y podemos tener 3 casos distintos, a saber:

<u>Primer caso:</u>

Si $\Delta > 0$ entonces las raíces $x_1\ y\ x_2$son reales y desiguales. Pero en este caso se presentan dos situaciones:

a) Si Δ es un cuadrado perfecto, las raíces $x_1\ y\ x_2$ son racionales.
b) Si Δ no es un cuadrado perfecto, las raíces $x_1\ y\ x_2$ son irracionales conjugadas.

<u>Segundo caso:</u>

Si $\Delta = 0$ entonces las raíces $x_1\ y\ x_2$ son reales e iguales (raíces dobles) donde:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

<u>Tercer caso:</u>

Si $\Delta < 0$ entonces las raíces $x_1\ y\ x_2$ son complejos y connjugados.

3.3.3. Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

Sea la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ y sus raíces $x_1\ y\ x_2$ tendremos las siguientes propiedades:

a) Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

b) Producto de raíces:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

c) Diferencia de raíces:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

d) Suma del cuadrado de las raíces:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

e) Identidad de Legendre aplicada a las raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

3.3.4. Construcción de una ecuación de segundo grado conociendo sus raíces

Conociendo las dos raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado, esta se construye empleando la suma y el producto de dichas raíces.

Luego, la ecuación que dio origen a x_1 y x_2 es:

$$x^2 - (x_1 + x_2).x + (x_1 x_2) = 0$$

Llamada también forma polinomica de la ecuación de segundo grado.

3.3.5. Propiedades adicionales de las raíces

La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ tiene raíces simétricas (raíces de igual valor pero de signo contrario) si y solo si:

$$x_1 = -x_2 \text{ de allí que: } x_1 + x_2 = 0 \text{ entonces } b = 0$$

La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ tiene raíces recíprocas (una de las raíces es la inversa de la otra) si y solo si:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \text{ de allí que: } x_1.x_2 = 1 \text{ entonces } a = c$$

<u>Raíz nula</u>

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ si esta presenta una raíz nula (x = 0) entonces: $c = 0$

<u>Raíz Unidad</u>

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ si esta presenta una raíz unidad (x = 1) entonces: $a + b + c = 0$

<u>Teorema de la raíz común</u>

Sean las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; \forall \; a \neq 0$$
$$mx^2 + nx + p = 0 \; \forall \; m \neq 0$$

Si admiten una raíz común, luego se cumplirá la siguiente relación:

$$(a.n - b.m).(b.p - n.c) = (a.p - m.c)^2$$

3.4. SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTOS

Sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

Este tipo de sistemas de ecuaciones puede ser resuelto de la siguiente manera:

1) Despejar alguna de las incógnitas de la ecuación lineal.

2) Sustituir la expresión de la incógnita despejada en la ecuación cuadrática.
3) Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita que se forma.
4) Sustituir los dos valores encontrados en la ecuación obtenida en el primer paso para asi encontrar luego, el valor de la otra incógnita.

<u>Ejemplo:</u>

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 5 & \mathbf{(1)} \\ 2x - 2y = 1 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Solución:

Despejando “x” de (2):

$$x = \frac{2y+1}{2} \qquad \mathbf{(3)}$$

Sustituyendo el valor de “x” en (1):

$$4.\left(\frac{2y+1}{2}\right)^2 + 4y^2 = 5$$

Realizando operaciones es fácil ver que:

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación resultante con Bhaskara nos dá:

$$y_1; y_2 = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4.(2).(-1)}}{2.(2)}$$

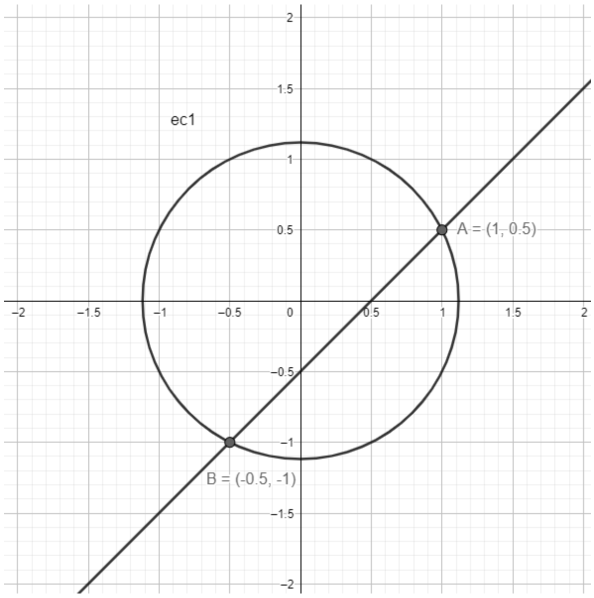
$$\boldsymbol{y_1 = \frac{1}{2}} \ e\ \boldsymbol{y_2 = -1}$$

Sustituyendo los valores de “y” en (3), se obtienen los valores de “x”:

$$x_1 = \frac{2y_1+1}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{2y_2+1}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{2.(1/2)+1}{2} = \mathbf{1} \quad y \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{2.(-1)+1}{2} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Si luego graficamos en un mismo par de ejes cartesianos ambas ecuaciones, tenemos:



NOTA: Para este caso estudiado, una de las ecuaciones es una circunferencia y la otra es lineal, pero de igual manera, el sistema puede estar constituido por una **ecuación cuadrática y una lineal**. Para resolver éste último se realizan los mismos pasos antes mencionados aquí.

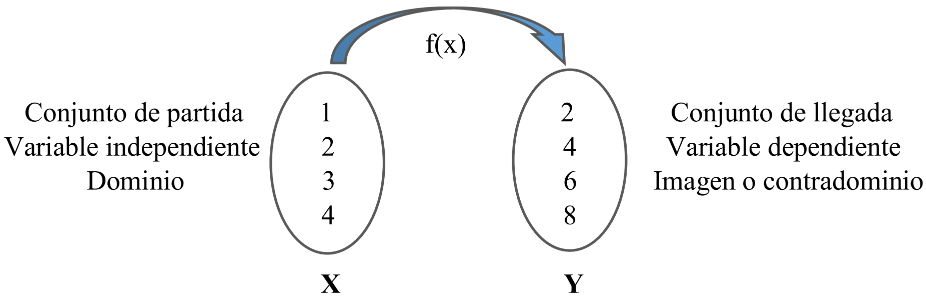
Unidad 4:

Funciones.

4.1. RELACIONES FUNCIONALES

4.1.1. Introducción

Se dice que “y” es función de “x” cuando a cada valor de la variable “x” le corresponde un valor de la variable “y”. Esta correspondencia se dá a través de una expresión matemática que denominamos ***función***. Gráficamente, ésta relación entre variables se puede mostrar en la siguiente figura:



El elemento $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ que corresponde al elemento de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ se denomina “***Valor de f en x***” o “***Imagen de x***” y se escribe como:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$$

Dominio de una función: (conjunto X o conjunto de partida), es el conjunto de existencia de la misma, es decir los valores para los cuáles la función está definida. Lo representaremos como Df.

Rango de una función: Conjunto Y o conjunto de llegada, lo representaremos con Rf.

Imagen o contradominio: Es el conjunto de los valores reales que toma la variable y ó $f(x)$ y lo representaremos como If.

4.1.2. Definición formal de función

Sea X e Y dos conjuntos, diremos que f es una función tal que $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ si y solo si se cumplen dos condiciones:

<u>*Condición de existencia*</u>
Para cada elemento $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, existe al menos un $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, tal que el par $(x; y)$, pertenece a la función.

Simbólicamente: $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X};\ \exists\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} /\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$
Donde: $Df = X$; $If = \{y \in Y /\ f(x) = y\}$

<u>*Condición de unicidad*</u>
Cada elemento del conjunto X debe estar relacionado con **único** elemento de Y.

Simbólicamente: $si\ f(x) = y \wedge f(x) = z \Longrightarrow y = z$

4.2. EVALUACION Y REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

4.2.1. Evaluación de funciones.

Evaluar una función consiste en determinar el valor de la variable $\boldsymbol{y}$ en base a un valor de la variable $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo:

Determinar el valor de $f(1), f(3), f(0)$ y $f(-3)$ para la función $y = 3x + 4$.

$$f(1) = 3.(1) + 4 = 7$$
$$f(3) = 3.(3) + 4 = 13$$
$$f(0) = 3.(0) + 4 = 4$$
$$f(-3) = 3.(-3) + 4 = -5$$

Actividad:

a) *En base a la función* $y = \frac{4x-3}{x+3}$ *determinar* $f(1), f(3), f(0)$ *y* $f(-3)$.

b) *Determinar el valor de* $f(1), f(2), f(-3)$ *y* $f(0)$ *para las siguientes funciones.*

1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

2) $f(x) = \frac{x+3}{2}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

6) $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+2}$

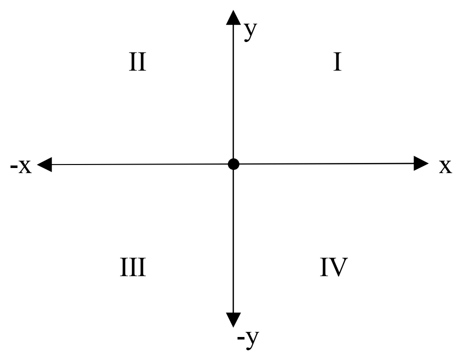
7) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x}$

8) $f(x) = 2x + 5$

4.2.2. Coordenadas cartesianas.

Sistema de ejes cartesianos

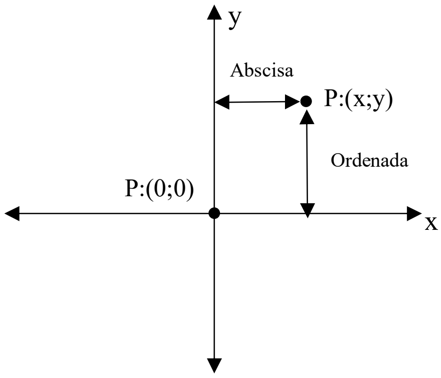
Un sistema rectangular de coordenadas cartesianas, son dos líneas rectas (recta real ℝ) perpendiculares que se cortan en un punto llamado ***origen*** (0;0). Estas líneas dividen al plano en cuatro secciones llamadas ***cuadrantes***, los cuáles se enumeran según se muestra en la siguiente figura.



La línea horizontal corresponde al denominado ***eje de las abscisas "x"*** y la línea vertical es el ***eje de las ordenadas "y"***.

Abscisa y ordenada de un punto

Consideremos la siguiente figura.



La distancia de un punto al eje de las ordenadas se llama ***abscisa del punto***, mientras que la distancia desde el punto al eje de las abscisas se llama ***ordenada del punto***. La abscisa y la ordenada de un punto son las coordenadas cartesianas del punto y se simboliza como **P:(x;y)**. El origen de coordenadas (punto central donde se cruzan las rectas) es el punto P:(0;0).

4.2.3. Gráfica de funciones.

El gráfico de una función, es una representación visual del comportamiento de una función en un plano **x-y**. Los gráficos nos ayudan a comprender los diferentes aspectos de una función, lo cual sería difícil con solo mirar a la ecuación. Se pueden graficar miles de ecuaciones y cada una tiene una fórmula diferente. Sin embargo, siempre hay formas de graficar una función si se olvidan los pasos exactos para ese tipo específico de función.

Sea $y = f(x)$, se sabe que para cada valor de "x" corresponde un valor de "y". Si se toman los valores de "x" como abscisa y los valores de "y" como ordenadas, se obtendrá una serie de puntos. El conjunto de éstos puntos puede ser una recta, una curva, una circunferencia, etc., la cuál queda representada en el sistema de ejes cartesianos.

4.2.3.1. Función lineal

Este tipo de función es un polinomio de primer grado cuya representación en el plano cartesiano es una linea recta. Su fórmula general es:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} \pm \boldsymbol{b} \ donde\ m\ y\ b\ \in \mathbb{R}\ y\ \boldsymbol{x}\ es\ una\ variable\ real$$

La constante **m** representa la pendiente de la recta, mientras que la constante **b** representa la ordenada al origen (valor donde corta o cruza al eje de las ordenadas).

Ejemplo:

Sea la función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \mathbf{1}$, obtener su gráfica por tabulación.

Vemos que la expresión, es un polinomio de primer grado con término independiente igual a 1. Si definimos un conjunto de valores para la variable independiente "x" alrededor de 0 tales como: -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3. Los valores que tomará "y" por aplicación de la función serán:

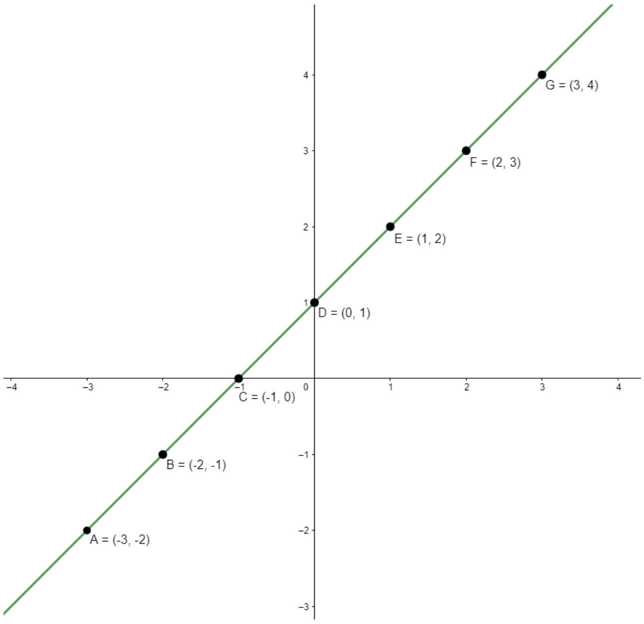
$$Para\ x = \mathbf{-3} \Rightarrow y = (-3) + 1 = \mathbf{-2}$$
$$Para\ x = \mathbf{-2} \Rightarrow y = (-2) + 1 = \mathbf{-1}$$
$$Para\ x = \mathbf{-1} \Rightarrow y = (-1) + 1 = \mathbf{0}$$
$$Para\ x = \mathbf{0} \Rightarrow y = (0) + 1 = \mathbf{1}$$

$$Para\ x = \mathbf{1} \implies y = (1) + 1 = \mathbf{2}$$
$$Para\ x = \mathbf{2} \implies y = (2) + 1 = \mathbf{3}$$
$$Para\ x = \mathbf{3} \implies y = (3) + 1 = \mathbf{4}$$

En forma tabular, la relación entre "x" e "y" puede ser representada de la siguiente manera:

x	**y**	**P:(x;y)**
-3	-2	(-3;-2)
-2	-1	(-2;-1)
-1	0	(-1;0)
0	1	(0;1)
1	2	(1;2)
2	3	(2;3)
3	4	(3;4)

Se observan en la tercer columna los **pares ordenados** (x;y). Representaremos cada uno de éstos en el plano cartesiano y los uniremos mediante una línea, quedando finalmente la gráfica que representa a la función $y = x + 1$.



Otra manera de graficar las funciones lineales, es observando su ordenada al origen y su pendiente, es decir: Sea la función lineal $\boldsymbol{y = mx \pm b}$ $\forall\ m\ y\ b \in \mathbb{R}$.

$La\ ordenada\ al\ origen\ \pm b \longrightarrow indica\ el\ punto\ en\ el\ cuál\ la\ gráfica\ corta\ al\ eje$ "y".
$La\ pendiente$:

$$m > 0 \longrightarrow indica\ que\ la\ línea\ es\ creciente.$$
$$m < 0 \longrightarrow indica\ que\ la\ línea\ es\ decreciente.$$
$$m = 0 \implies y = \pm b \longrightarrow es\ una\ constante.$$

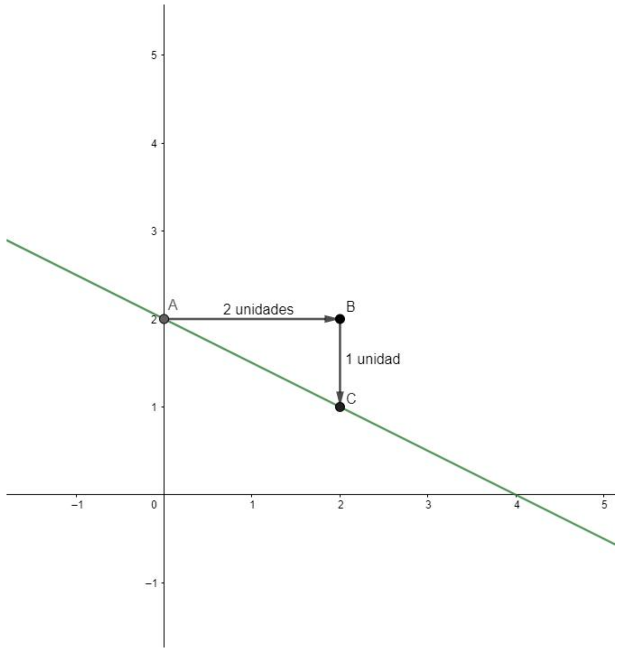
La pendiente tiene que ver con la inclinación de la recta y es una fracción de $\frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal}$.

Ejemplo:

Graficar la función $y = \left(-\frac{1}{2}\right) x + 2$ sin tabla de valores.

La ordenada al origen $b = 2$ indica que el corte en el eje vertical será en $y = 2$. Con éste dato ya tengo una coordenada de puntos por el cuál pasará la recta, ya que es el equivalente a igualar a 0 la variable "x" y calcular "y". Con sólo observar la ecuación obtengo P:(0;2).

El siguiente paso consiste en realizar los desplazamientos tanto horizontal como vertical según indica la pendiente (m = (-1/2)). A partir del punto anteriormente encontrado (ordenada al origen), realizo primero, un desplazamiento horizontal según lo indica el denominador de la pendiente y segundo, un desplazamiento vertical según lo indica el numerador, como se observa en la siguiente figura.



Encontrado el punto A, me desplazo hacia la derecha 2 unidades hasta B, luego al ser la pendiente de signo negativo, me desplazo 1 unidad hacia abajo para encontrar otra coordenada (x;y) correspondiente a la función para finalmente, unir ambos puntos y graficar la línea. Como se puede observar, la pendiente al ser negativa, la función decrece, caso contrario, si la pendiente hubiera sido positiva, debería desplazarme 1 unidad hacia arriba y la función hubiera sido creciente.

Actividad:

Graficar las siguiente funciones sin tabla de valores.

a) $y = 2x + 1$	b) $y = (1/3)x - 1$	c) $y = \left(-\frac{3}{2}\right) x$
d) $y = -x + 2$	e) $y = 0x + 3$	f) $\frac{-2x-3y}{3} = 2$

4.2.3.1.1. Ecuación de la recta conocido dos puntos

Ya sabemos obtener al menos dos puntos de una recta conocida su ecuación pero, ¿Cómo obtenemos la ecuación de una recta conocido dos puntos?

Sean los pares ordenados de puntos $P_1: (x_1; y_1)$ y $P_2: (x_2; y_2)$ correspondientes a una recta, podemos conocer su ecuación aplicando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{y-y_1}}{\boldsymbol{y_2-y_1}} = \frac{\boldsymbol{x-x_1}}{\boldsymbol{x_2-x_1}}} \qquad \forall\, \boldsymbol{x_2 - x_1 \neq 0}$$

Reemplazando valores y despejando "y" en función de "x" ($y = f(x)$) obtenemos la ecuación de la recta conocido dos puntos. Esto resulta muy útil para ***interpolar***, es decir, obtener nuevos datos a partir de un conjunto discreto de puntos conocidos.

4.2.3.1.2. Ecuación de la recta conocida la pendiente y un punto

Sea $\boldsymbol{m}$ la pendiente de una recta y $\boldsymbol{P_1: (x_1; y_1)}$, por deducción de la ecuación anterior, tambien es posible hallar la ecuación de la recta de la siguiente manera:

Partimos de:

$$\frac{\boldsymbol{y-y_1}}{\boldsymbol{y_2-y_1}} = \frac{\boldsymbol{x-x_1}}{\boldsymbol{x_2-x_1}}$$

Despejamos:

$$\boldsymbol{y - y_1 = (y_2 - y_1).\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

Reacomodamos:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.(x - x_1)}$$

Donde el valor $\boldsymbol{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ representa a la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la recta quedando finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = m.(x - x_1)}}$$

Actividad:

a) *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_1: (-3; -2)$ *y* $P_2: (1; 2)$.

b) *Hallar la ecuación de la línea que pasa por el punto* $P_1: (0{,}25; -3)$ *y tiene pendiente* $m = 4$.

4.2.3.1.3. Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas graficadas en un mismo sistema de ejes cartesianos, serán paralelas $//$ cuando ambas posean la misma pendiente y diferente ordenada al origen. De igual manera, serán perpendiculares $\times$ cuando tengan la pendiente invertida y cambiada de signo.

4.2.3.2. Función cuadrática

Estas funciones son polinomios de segundo grado. Su ***fórmula polinomica*** general es:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

Tambien pueden ser representadas en su ***forma factorizada o canónica*** como:

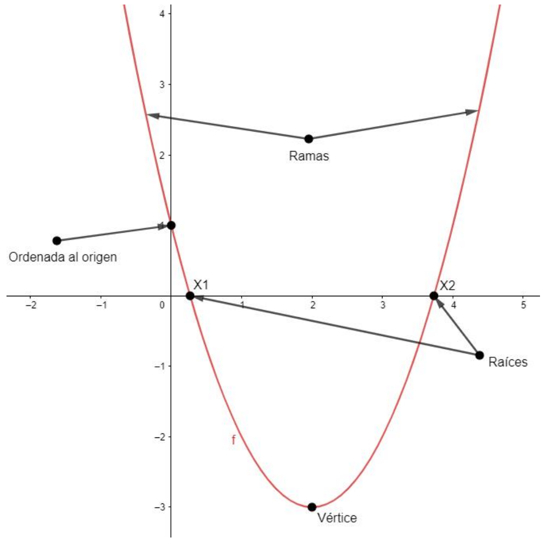
$$\boldsymbol{y = a.(x - h)^2 + k}$$

Actividad:

A partir de la forma canónica de la función $y = 2.(x-3)^2 + 2$, *obtener su forma polinómica.*

………..

Las gráficas de estas funciones se denominan ***parábolas***, y podemos observar varios elementos de las mismas según se muestra en la figura a continuación:



Veamos como influyen los elementos de la forma canónica y de la forma polinomica en la representación gráfica de las parábolas:

Forma canónica:

$\boldsymbol{y = a.(x-h)^2 + k}$

$\begin{cases} Vértice\ de\ la\ parábola: \\ V: (h; k) \end{cases}$

$\{h = eje\ de\ simetría$

$\begin{cases} si\ 0 < |a| < 1 \Longrightarrow la\ parábola\ se\ ensancha \\ si\ |a| > 1 \Longrightarrow la\ parábola\ se\ estrecha \\ si\ a > 0 \Longrightarrow es\ cóncava\ hacia\ arriba \\ si\ a < 0 \Longrightarrow es\ cóncava\ hacia\ abajo \end{cases}$

Forma polinomica:

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

$\{Ordenada\ al\ origen\ y = \pm c$

$\begin{cases} Vértice\ de\ la\ parábola: \\ \left[\frac{-b}{2a}\ ; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right] \\ \text{ó} \\ \left[\frac{-b}{2a}\ ;\ -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right] \end{cases}$

$\{ídem\ que\ la\ forma\ canónica$

Finalmente, como se vió en la unidad anterior, el valor del discriminante $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ aplicado a las funciones cuadráticas, nos indicará si la misma posee raíces reales distintas, iguales o complejas. (recordar que raíz, son aquellos valores de “x” que reemplazados en la función original, dan igual a 0 o dicho de otra manera, es donde la gráfica corta al eje de las abscisas).

Actividad:

Para las siguientes funciones, hallar la ordenada al origen, raíces, vértice y eje de simetría. Con éstos datos, graficar.

a) $f(x) = x^2 + 2x - (3/2)$
b) $y = \frac{1}{2}.(x-2)^2 + 3$
c) $y = -2x^2 - 3x - 2$
d) $f(x) = 2(x+1)^2 + 1$

4.2.3.3. Función módulo

Conociendo la definición de módulo, visto en la unidad anterior, es posible ahora aplicando la misma, graficar funciones de éste tipo también llamadas *funciones valor absoluto*.

Su fórmula general es la siguiente:

$$\boldsymbol{y = a|x-h| + k}$$

De donde, al igual que las funciones cuadráticas, poseen un factor de forma $\boldsymbol{a}$ y vértice en $\boldsymbol{V}: (\boldsymbol{h}; \boldsymbol{k})$.

La gráfica para éste tipo de funciones, será lineal siempre y cuando el polinomio que se encuentre dentro del valor absoluto, sea de primer grado como se muestra en el siguiente ejemplo. Si el polinomio es de segundo grado responderá a la forma de una parábola aunque ésta última, queda fuera del alcance del presente material.

<u>Ejemplo:</u>

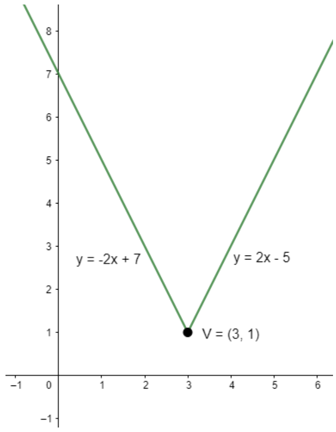
Graficar aplicando la definición de valor absoluto, la función $\boldsymbol{y = 2|x-3| + 1}$

Por definición de módulo sabemos:

$$y = \begin{Bmatrix} 2(x-3)+1 & si & x-3>0 \\ & \wedge & \\ 2(3-x)+1 & si & x-3 \leq 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-5 & si & x>3 \\ & \wedge & \\ -2x+7 & si & x \leq 3 \end{Bmatrix}$$

Como se observa, son dos ecuaciones lineales pero restringidas en su dominio.
Conclusión:

$$la\ gráfica\ corresponderá\ a: \begin{cases} y = 2x-5 \ \ \forall \ x>3 \\ \qquad \wedge \\ y = -2x+7 \ \ \forall \ x \leq 3 \end{cases}$$



Actividad:

Graficar aplicando definición de módulo, las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{2}|x-2|$
b) $y = 4|3-x| - 2$
c) $y = -|x| + 1$

4.2.3.4. Función exponencial

Siempre que haya un proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo, ese proceso se describe mediante una función exponencial. Por ejemplo:

- Crecimiento de bacterias y otras poblaciones animales y vegetales en biología.
- Interés del dinero acumulado y planes de ahorro en administración de empresas.
- Desintegración radiactiva o nuclear.
- Reacciones de primer orden en química.

De la familia de funciones son de las más importantes por la gran cantidad de aplicaciones que tienen y tienen la fórmula general:

$$\boldsymbol{f(x) = a^x}$$

Donde la base $\boldsymbol{a}$ es una constante (un número) y el exponente es la variable independiente $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo:

Algunos tipos de bacterias se reproducen por “mitosis”, dividiéndose la célula en dos cada espacio de tiempo muy pequeño, en algunos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se reproducen en éstos casos a partir de una, en un día?

$\boldsymbol{x}$ (minutos)	0	15	30	45	60
$\boldsymbol{y}$ (N° bacterias)	1	1.2	1.2.2 = 1.2^2	1.2.2.2 = 1.2^3	1.2.2.2.2 = 1.2^4

$$\boldsymbol{y = 2^x}$$

Siendo “x” los intervalos de tiempo donde por cada hora, hay 4 intervalos de 15 minutos, por lo tanto en 24 horas tendremos 24.4 = 96 intervalos de tiempo, y la cantidad de bacterias en 1 día serán de $2^{96} = 7{,}9x10^{28}$. Esto nos dá idea del llamado **¡Crecimiento exponencial!**, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

Actividad:

a) En el siguiente gráfico, se muestran ejemplos de funciones exponenciales.

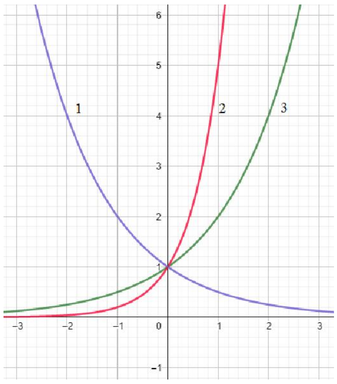


Figura 1

Deducir qué función corresponde a cada una de las gráficas:

- $y = 2^x$ (…)
- $y = 5^x$ (…)
- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (…)

¿Qué podemos concluir acerca de los cambios en la base $\boldsymbol{a}$*?*..
…………………………………………………………………………………………………….....

b) Para el siguiente, deducir cuál función representa a cada gráfica.

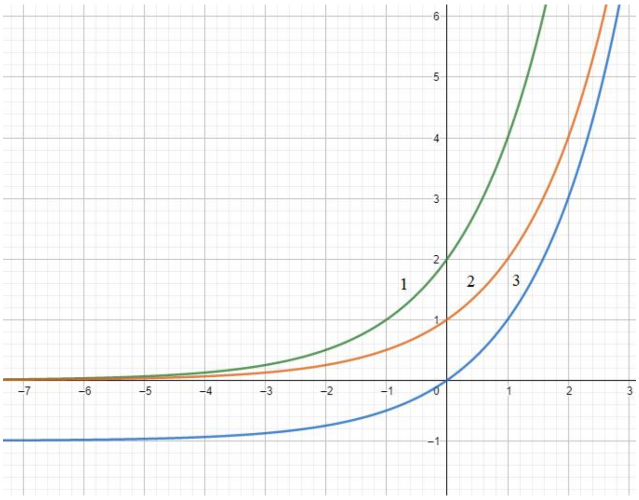


Figura 2

- $y = 2^x$ (…)
- $y = 2^{x+1}$ (…)
- $y = 2^x - 1$ (…)

c) Con las conclusiones obtenidas anteriormente, graficar las siguiente funciones.

- $y = 4^{x+1} + 1$
- $y = 2^{x+1} + 2$

- $y = 2^{x+2} + 1$

Observa en las gráficas anteriores que la función existe para cualquier valor de "x", decimos entonces que el dominio de estas funciones es todo el conjunto de los reales.

En la figura 1, para todos los casos la funcion pasa por el punto (0;1) y tambien que los valores de la imagen son siempre positivos.

En ambas figuras, la función es siempre creciente o decreciente estrictamente y posee una asíntota horizontal.

4.2.3.5. Función logaritmica

Debido a que la función exponencial es biyectiva, el teorema de la función inversa nos asegura que existe una función $g(x) = (a^x)^{-1}$. Dicha función es la ***función logaritmica***.

La forma general que siguen estas funciones es:

$$\boldsymbol{f(x) = \log_a(x)}$$

Donde "a" es una constante (un número) que representa a la base del logaritmo.

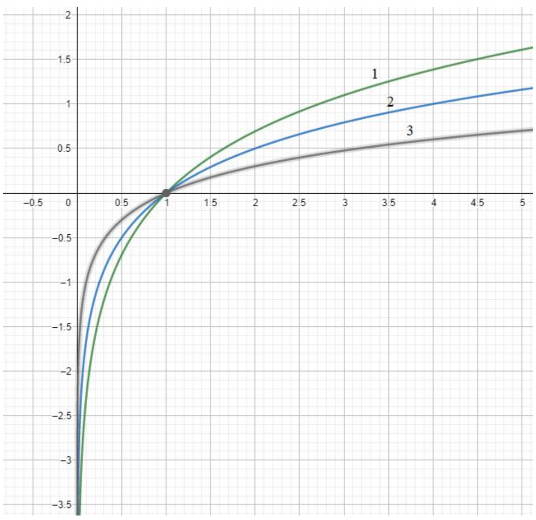
Además sabremos que la base del logaritmo nunca puede ser un número negativo y que las bases mas frecuentes son la base 10 (logaritmos decimales) y la base "$e = 2{,}718281 \ldots$." (logaritmos neperianos).

La función logaritmica que mas se utiliza en matemáticas es la función "logaritmo neperiano" y se simboliza normalmente como $y = \ln(x)$ mientras que la función logaritmo decimal se simboliza como $y = \log(x)$. Se trata de la inversa de la función exponencial en la que $\boldsymbol{a}$ toma el valor de la constante de Euler, es decir:

$$\ln(x) = (e^x)^{-1}$$

Actividad:

a) *En el siguiente gráfico se muestran funciones logaritmicas. ¿Cuál función representa a cada una de las gráficas?*

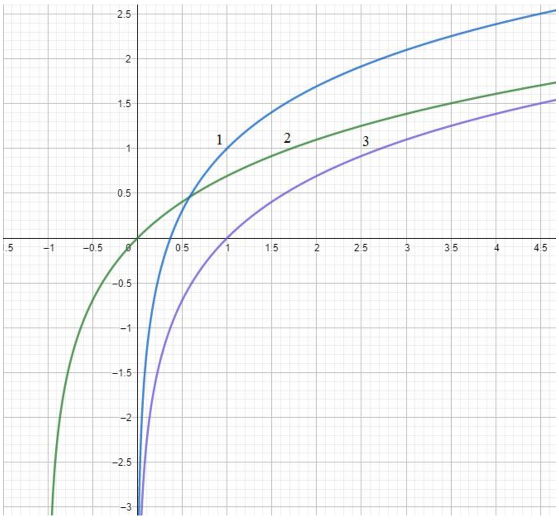


- $f(x) = \log_2(x)$ (…)

- $f(x) = \log_4(x)$ (…)
- $f(x) = \log_{10}(x)$ (…)

¿Qué podemos concluir acerca de los cambios en las gráficas con respecto a la base de los logaritmos?. ¿Cómo sería una gráfica aproximada si la base del logaritmo es de (½)?...
………....
¿Por qué todas las gráficas cortan en el mismo punto P:(1;0)?..
...………………………………………………………………………………………………….........

b) *Sabiendo que el* $\log_e(x) = \ln(x)$*, deducir qué función representa a cada una de las gráficas.*



- $f(x) = \ln(x+1)$ (…)
- $f(x) = \ln(x) + 1$ (…)
- $f(x) = \ln(x)$ (…)

Con las conclusiones obtenidas, graficar sin tabla de valores la función $y = \ln(x-2) - 1$.
………

4.2.3.6. Funciones racionales

Una función racional está formada por la división de dos funciones polinomicas, es decir:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

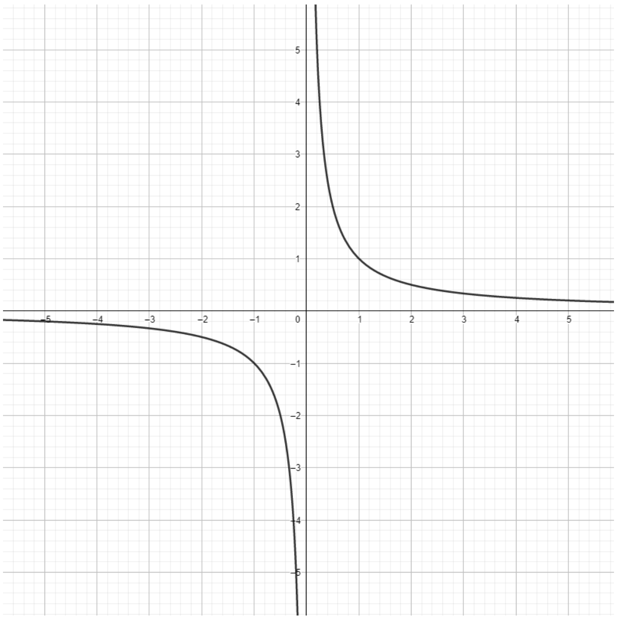
Funciones racionales propias son aquellas en las que el grado del polinomio del numerador en menor que el grado del polinomio del denominador, es decir: $n < m$.

Funciones racionales impropias son aquellas en las que el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, es decir: $n > m$.

Para éste tipo de funciones, el dominio es el conjunto de todos los números reales ℝ excepto los valores de la variable “x” en donde el denominador se hace 0, ya que una división por cero no existe. Su imagen requiere analizarse en cada caso.

La forma mas común y básica de éste tipo de gráficas es:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$$



Analizando la función, vemos que no está definida cuando $x=0$ presentando allí una asíntota vertical y en $y=0$, una asíntota horizontal. Luego, ***asíntotas*** son aquellas líneas imaginarias por donde la gráfica se acercará tanto como se quiera hasta $\pm\infty$ pero "nunca" la cruzarán y se representan mediante líneas de puntos (existen además asíntotas oblicuas las cuáles quedan fuera del alcance del presente material).

Teniendo en cuenta lo anterior, la gráfica podrá desplazarse a traves del plano tomando como vértice, el punto en donde se cruzan las asíntotas, que para el caso anterior será en el P:(0;0). Se representará de manera general como:

$$f(x)=\frac{a}{x-h}+k$$

Donde $V:(h;k)$

Actividad:

Graficar las siguientes funciones teniendo en cuenta sólo el desplazamiento del vértice.

a) $y=\frac{1}{x+1}+2$ b) $f(x)=\frac{1}{x-2}+1$ c) $y=\frac{1}{x+3}-2$

Para obtener la gráfica de las funciones racionales, aparte de encontrar asíntotas, podemos encontrar intersecciones con el eje "y" (ordenada al origen) e intersecciones con el eje "x" (raíces).

Para encontrar la ordenada al origen, se asigna a la variable "x" de la función, el valor de 0, se resuelve y se obtiene f(0).

Las raíces se obtienen asignando el valor de 0 a la variable dependiente "y" y despejando "x".

<u>Ejemplo:</u>

Sea la función racional propia:

$$y=\frac{3}{x+1}$$

Evaluamos en $x=0$ para obtener la ordenada al origen:

$$f(0) = \frac{3}{0+1} = \mathbf{3} \longrightarrow interseccion\ con\ el\ eje\ "y"$$

Igualamos la función a cero para obtener la raíz:

$$0 = \frac{3}{x+1} \Longrightarrow 0.(x+1) = 3$$

Llegamos a un absurdo, lo que significa que no existe valor de “x” para que la función valga cero y por lo tanto, no posee raíces y como vimos anteriormente, en $y = 0$ presentará una asíntota horizontal.

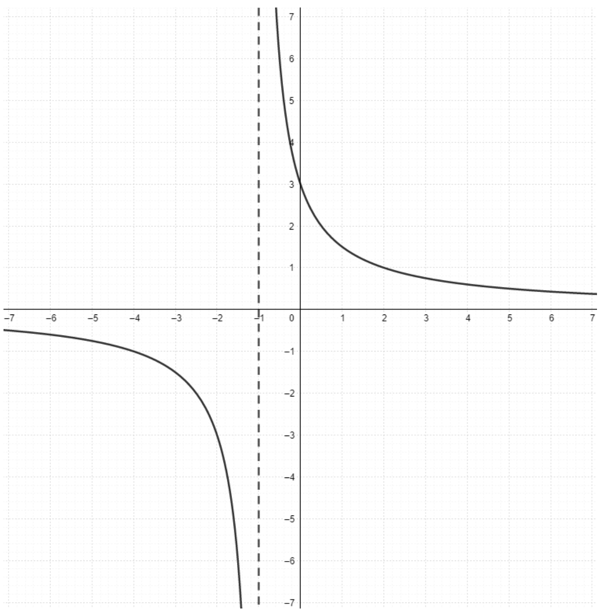
Para aclarar el comportamiento de la función, recurrimos a comprobar algunos valores mediante una tabulación:

x	$f(x)$
-100	-0,0303
-10	-0,3333
-1,01	-300
-1	3/0
-0,99	300
0	3
2	1
10	0,2727
100	0,0297

En la tabla se observa que para valores de “x” cada vez mas grandes ($x \longrightarrow \infty$), los valores de $f(x)$ son cada vez menores acercándose a cero ($f(x) \longrightarrow 0$). Para valores de “x” cada vez mas negativos ($x \longrightarrow -\infty$), los valores de $f(x)$ tambien se acercan a cero. Este comportamiento de la función se dice que es asintótico al eje de las abscisas.

Tambien se observa que si nos acercamos a $x = -1$, los valores de $f(x)$ son cada vez mayores por la derecha, y cada vez menores por la izquierda. Otra vez el comportamiento de la función es asintótica en $x = -1$.

Luego, la representación gráfica es la siguiente:



El dominio de ésta función es el conjunto de todos los número reales excepto el x = -1 y la imagen es tambien el conjunto de todos los reales excepto y = 0.

Ejemplo:

Sea la función racional impropia:

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$$

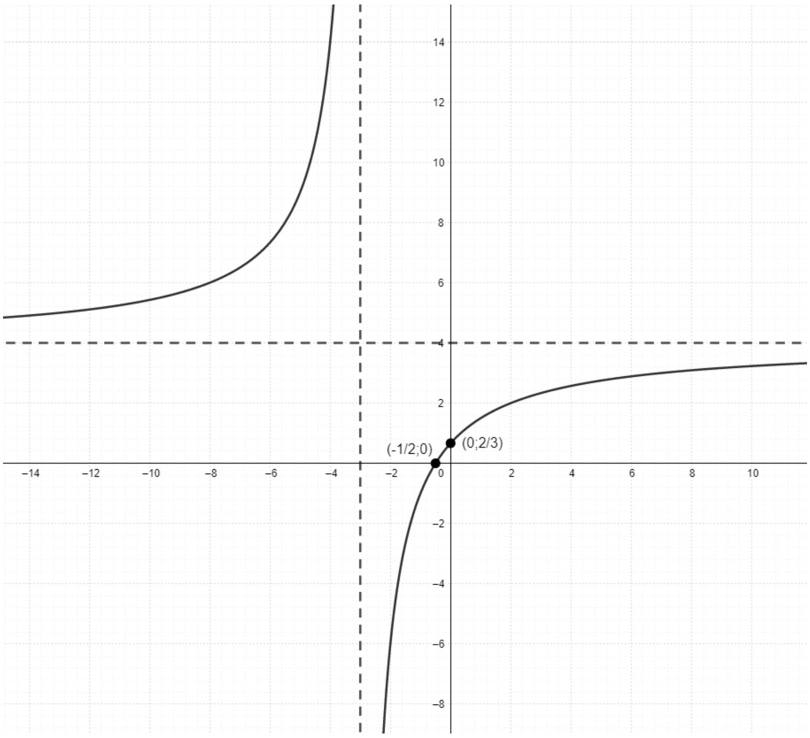
Como el grado del polinomio del numerador es igual al grado del polinomio del denominador, podemos realizar la división aplicando la regla de Ruffini y expresarla de la forma:

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3} = 4 - \frac{10}{x+3}$$

Evaluamos en $f(0)$ para obtener la ordenada al origen quedando $y = 2/3$.
Igualamos la función a cero y despejamos "x" para obtener la/s raíces quedando $x = -1/2$.
Para las asíntotas verticales igualamos el denominador a cero y despejamos "x" quedando $x = -3$.

Reacomodando la función y representando gráficamente con los datos obtenidos, nos queda:

$$y = -\frac{10}{x+3} + 4$$



¿Qué se puede concluir acerca del signo negativo de la función?. ¿Cómo afecta el número 10 en el denominador?. Analizar el desplazamiento del vértice y comparar con las funciones antes vistas.

……..

En las funciones racionales, las asíntotas verticales se generan a partir de las raíces del denominador. Cuando éstas raíces no tienen multiplicidad o tienen multiplicidad impar, la función tiende a infinito positivo de un lado de la asíntota y a infinito negativo del otro lado. Cuando la multiplicidad de las raíces es par, la función se comporta igual de ambos lados de la asíntota.

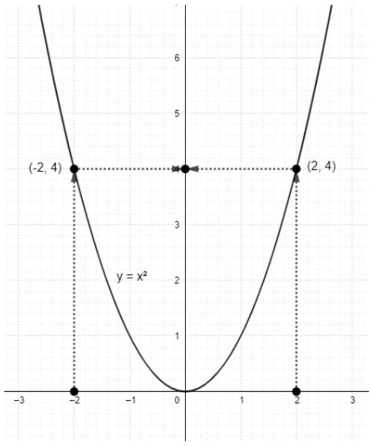
4.3. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

4.3.1. Función inyectiva

Una función $y = f(x)$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall\ (x_1; x_2) \in X$ con $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

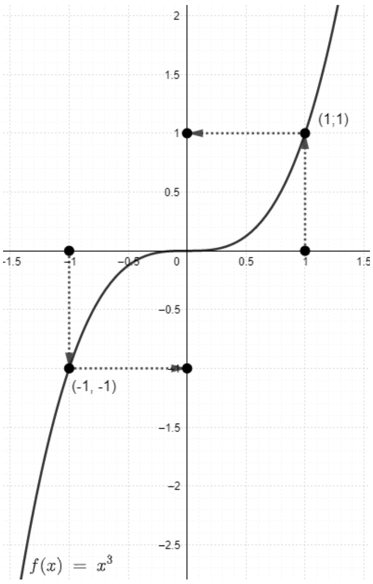
Si se tiene la gráfica de la función, para saber si es inyectiva, basta con trazar una línea horizontal imaginaria a través de la función y observar, si la misma corta en dos puntos a la gráfica entonces **no es inyectiva** y si lo hace en un solo punto, **si es inyectiva**.

Ejemplos:



$$\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$$
$$-2 \neq 2$$
$$(-2)^2 = (2)^2$$
$$4 = 4$$
$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$$

"NO ES INYECTIVA"



$$\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$$
$$-1 \neq 1$$
$$(-1)^3 \neq (1)^3$$
$$-1 \neq 1$$
$$\boldsymbol{f(x_1) \neq f(x_2)}$$

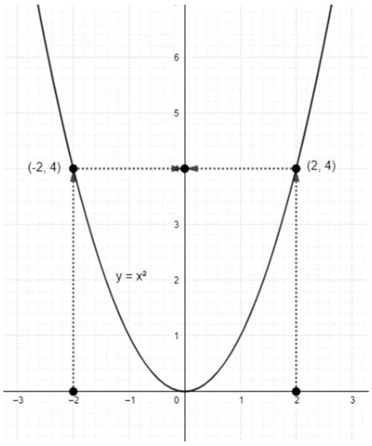
"ES INYECTIVA"

4.3.2. Función sobreyectiva

Una función $y = f(x)$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall\ y \in Y\ ;\ \exists\ x \in X / f(x)\ = y$ es decir, el rango de la función es igual a la imagen.

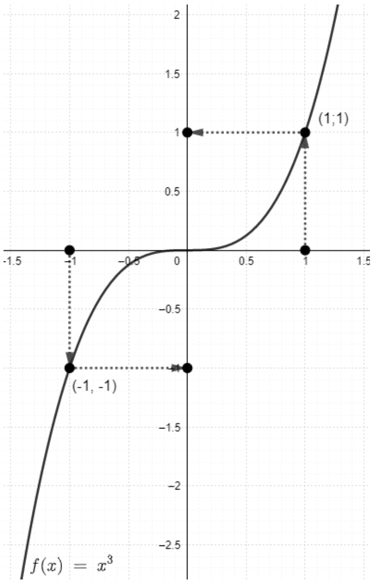
Dicho de otra manera, el rango de una función es el conjunto de todos los valores dependientes posibles que la relación puede producir. Es la colección de todas las salidas posibles.

Ejemplos:



$$\left.\begin{matrix} Rf: \mathbb{R} \\ If: \mathbb{R}_0^+ \end{matrix}\right\} Rf \neq If$$

"NO ES SOBREYECTIVA"



$$\left.\begin{matrix} Rf: \mathbb{R} \\ If: \mathbb{R} \end{matrix}\right\} Rf = If$$

"ES SOBREYECTIVA"

4.3.3. Función biyectiva

4.3.3. Función biyectiva

Una función $y = f(x)$ es biyectiva $\Leftrightarrow$ $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

4.4. ANÁLISIS DE FUNCIONES

4.4.3. Dominio e imagen

Lo primero que hay que estudiar siempre en una función es su dominio o conjunto de valores de "x" para los cuáles f(x) existe o está definida.

Hay funciones que se crean artificialmente dando por definición el dominio (funciones a trozos o por partes) o bien se tratan de funciones que modelizan una situación real que no tiene sentido para ciertos valores de "x" aunque matemáticamente se puedan calcular.

Las funciones polinómicas por ejemplo, están definidas en todo el conjunto ℝ.

Las funciones racionales (cociente de polinomios) no están definidas en los valores que anulan el denominador.

Recordar: Dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente "x" de una función para los cuáles la misma está definida. Mientras que la imagen o codominio son todos los valores de la variable dependiente que toma la función, o sea valores de "y".

Actividad:

Determinar el dominio de las siguientes funciones, luego graficar y determinar la imagen.

a) $y = 3x - 1$
b) $y = |x|$
c) $y = x^2 - 4$
d) $y = \sqrt{25 - x^2}$
e) $y = 1/(x - 1)$
f) $y = \log\ (x)$

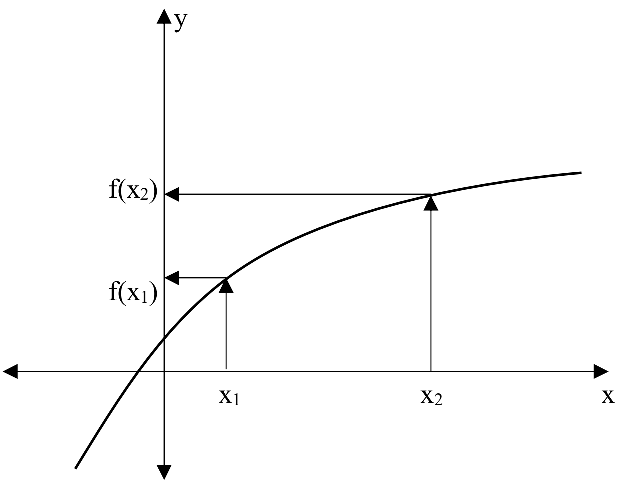
4.4.4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

<u>Función creciente</u>

Diremos que una función es creciente cuando para dos valores $x_1\ y\ x_2$ que pertenecen al dominio de la función y cumplen que $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Simbólicamente: $\forall\ \boldsymbol{x_1\ y\ x_2}\ \in \boldsymbol{Df}\ \wedge\ \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}\ \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_1)} < \boldsymbol{f(x_2)}$

Gráficamente:



<u>Ejemplo:</u>

Sea la función $y = 2x + 3$ analizar si es creciente en $x \in (0; +\infty)$.

Primero vamos a tomar dos valores que se encuentren en el intervalo indicado, por ejemplo el 2 y el 4 y hacemos:

$$\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$$
$$2 < 4$$
$$2.(2) + 3 < 2.(4) + 3$$
$$7 < 11$$
$$\boldsymbol{f(2)} < \boldsymbol{f(4)} \qquad \therefore\ es\ creciente$$

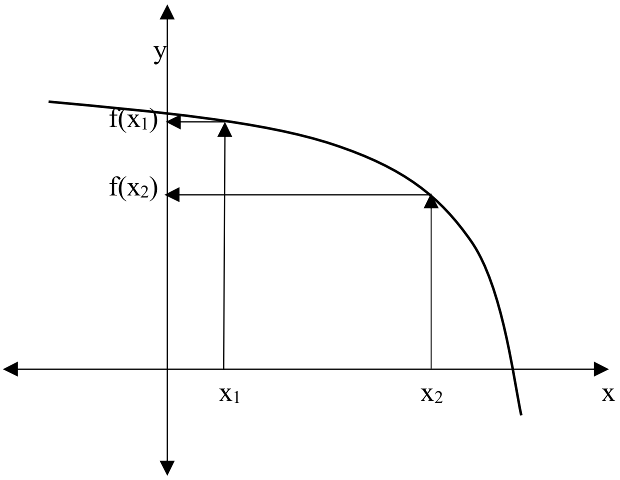
Como vimos anteriormente, se trata de una función lineal de pendiente positiva y su gráfica es creciente para todos los valores de "x" pertenecientes al conjunto de los reales.

Función decreciente

Una función es decreciente cuando para dos valores x_1 y x_2 que pertenecen al dominio de la función y cumplen que $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Simbólicamente: $\forall\, \boldsymbol{x_1}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{Df} \wedge \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} > \boldsymbol{f(x_2)}$

Gráficamente:



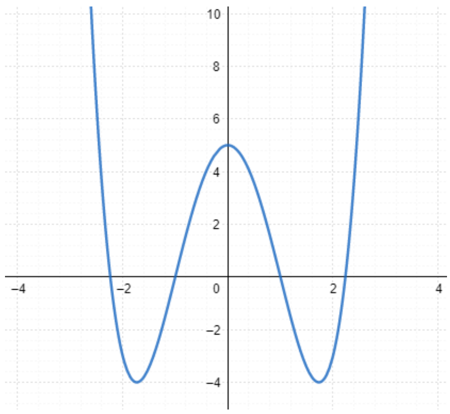
Actividad:

Demostrar que la función $y = x^2$ es decreciente en el intervalo $x \in (-\infty; 0)$.

………

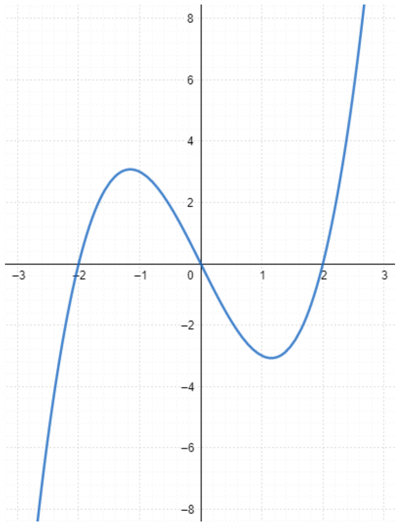
4.4.5. Paridad e imparidad

- Una función $y = f(x)$ es **PAR** si $\forall\, x \in Df \Rightarrow f(x) = f(-x)$. Gráficamente, una función es par si es simétrica con respecto al eje de las ordenadas "y".



$y = x^4 - 6x^2 + 5\ es\ una\ función\ par.$

- Una función $y = f(x)$ es **IMPAR** si $\forall\, x \in Df \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Gráficamente, una función es impar si es simétrica con respecto al origen de coordenadas P:(0;0).



$y = x^3 - 4x\ es\ una\ función\ impar.$

4.4.6. Intervalos de positividad y negatividad

Las raíces reales de una función, si es que existen, nos permitirán determinar los intervalos en los cuáles la función es positiva y los intervalos en donde es negativa.

Los intervalos de positividad (C^+) de una función $f(x)$, son los intervalos de "x" en los cuáles la función es positiva, es decir donde $f(x) > 0$. Gráficamente corresponde al intervalo (o los intervalos) de valores de "x" en los cuáles la "curva" se encuentra por encima del eje de las abscisas "x".

Los intervalos de negatividad (C^-) de una función $f(x)$, son los intervalos de "x" en los cuáles la función es negativa, es decir donde $f(x) < 0$. Gráficamente corresponde al intervalo (o los intervalos) de valores de "x" en los cuáles la "curva" se encuentra por debajo del eje de las abscisas "x".

En las funciones contínuas, los ceros (o raíces) son los valores de "x" que separan los conjuntos de positividad y negatividad. Como el número cero no tiene signo, el cero de la función no debe incluirse en los conjuntos C^+ ni C^-. En éstos casos, dichos conjuntos son siempre intervalos abiertos.

En las funciones discontínuas, tanto los ceros como las asíntotas verticales, son los valores de "x" que separan (o pueden separar) los conjuntos C^+ y C^-. En funciones discontínuas tambien pueden darse conjuntos de positividad y negatividad cerrados o semi cerrados.

Actividad:

De las gráficas anteriormente vistas (apartado 2.5.3) indicar los intervalos C^+ y C^-.

……………………………………………………………………………………………………

4.5. FUNCIÓN INVERSA

Dada la función biyectiva $f: x \longrightarrow y$, se llama función inversa de f a la función $f^{-1}: y \longrightarrow x$ que asocia a $y \in Y$ un único elemento $x \in X / f(x) = y$.

Si f^{-1} es inversa de $f \Rightarrow f^{-1}$ tambien es biyectiva y su inversa es f.

Ejemplo:

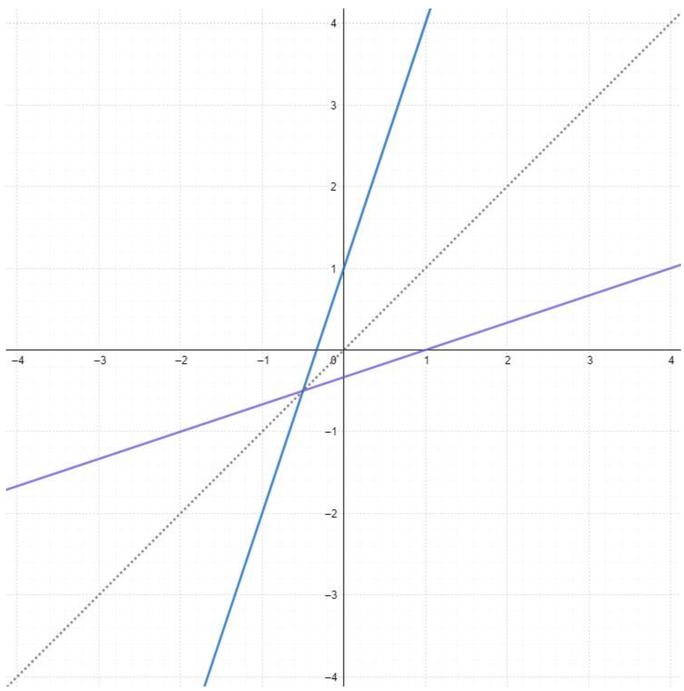
Sea la función $f: x \longrightarrow y, f(x) = 3x + 1$, hallar su inversa y graficar en un mismo par de ejes cartesianos.

En primer lugar, se analiza la biyectividad de la función original. Si se cumple ésta condición entonces existirá su inversa, caso contrario habrá que redefinir su dominio para que sea biyectiva.

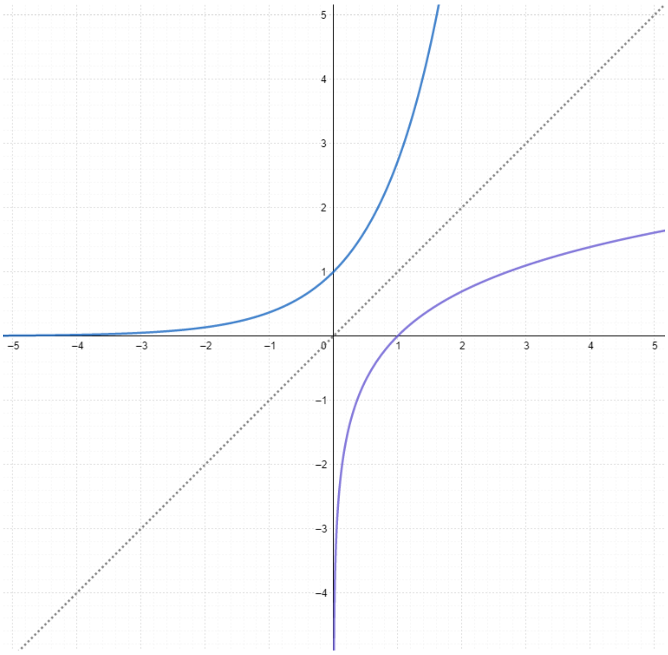
Como se vió anteriormente, las funciones lineales siempre son biyectivas, entonces pasamos a calcular directamente su función inversa. Este cálculo consiste en despejar la variable “x” y dejarla en función de la variable “y” para, finalmente hacer intercambio de variable y dejar expresada la $f^{-1}(x)$.

$$y = 3x + 1$$
$$y - 1 = 3x$$
$$\frac{y-1}{3} = x \longrightarrow intercambio\ x\ por\ y$$
$$\boldsymbol{y^{-1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$$

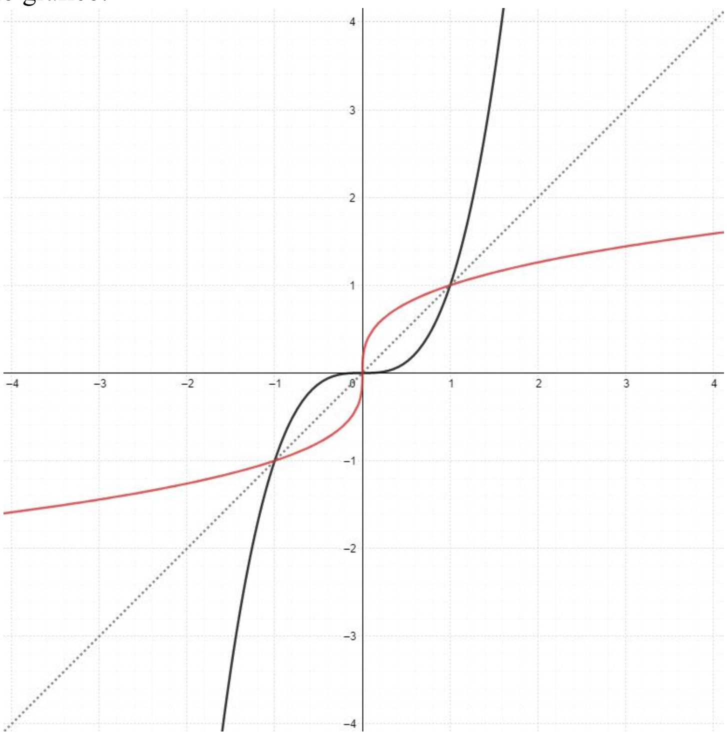
Gráficamente, una función y su inversa, son simétricas con respecto a la función $\boldsymbol{y = x}$ mas conocida como **recta identidad** (línea punteada) como se observa a continuación:



Sabemos además de apartados anteriores, que la función inversa de la función exponencial es la logarítmica, que gráficamente podemos apreciar en el siguiente gráfico y sus simetrías con respecto a la recta identidad.



Otro ejemplo gráfico:



¿De qué funciones se tratan las gráficas anteriores?

……………………………………………………………………………………………………

Unidad 5:

Trigonometría.

5.1. ANGULOS Y SISTEMAS DE MEDICION

5.1.1. Introducción.

La palabra *trigonometría* proviene del griego que significa *trigonos* (triángulo) y *metría* (medida). En sus orígenes, ésta rama de las matemáticas se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomia, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y cualquier otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Sirve para estudiar fenómenos vibratorios, como por ejemplo la luz, el sonido, la electricidad, etc.

5.1.2. Sistemas de medición de ángulos

Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más utilizados son:

5.1.2.1. Sistema sexagesimal

Cuya unidad de medida angular es el ***grado sexagesimal***, que es la novena-ava parte del águlo recto y se simboliza como **1°**. La sesenta-ava parte de un grado es un minuto (**1'**) y la sesenta-ava parte de un minuto es el segundo (**1"**).

$$\frac{\acute{a}ngulo\ recto}{90} = 1° \qquad \frac{1°}{60} = 1' \qquad \frac{1'}{60} = 1''$$

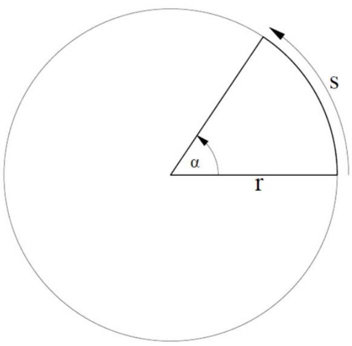
Un ángulo llano mide 180° y un giro completo mide 360°.

5.1.2.2. Sistema circular o radial

Cuya unidad de medida es el ***radián***, que es la proporcionalidad que existe entre la longitud ***s*** de los arcos de dos circunferencias concéntricas cualesquiera determinados por un ángulo central **α** y los radios ***r*** correspondientes. Esto permite tomar como medida del ángulo el cociente:

$$\boldsymbol{radian = \frac{longitud\ de\ arco}{radio} = \frac{s}{r}}$$

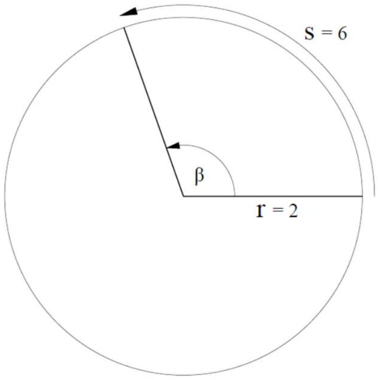
Un ángulo central de 1 radián, es aquel que determina un arco que tiene la misma longitud que el radio.



$s = r \Longrightarrow \frac{s}{r} = 1$

*Un **radián** es la medida del ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados determinan sobre ella un arco **s** de longitud igual al radio **r**.*

Ejemplo:



Si β determina una longitud de arco de 6 cm en una circunferencia de radio 2 cm, entonces la medida en radianes de β será:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{s}{r} = \frac{6\ cm}{2\ cm} = \mathbf{3}$$

En el sistema circular, β mide 3 radianes o simplemente decimos que mide 3, sin indicar la unidad de medida.

Si decimos que el diámetro de una circunferencia es la línea recta que une dos puntos de la misma pasando por el centro, se encuentra una relación muy útil que resulta de realizar un giro completo de 360° formando una longitud de arco equivalente a la longitud completa de la circunferencia. Esta relación es la que da origen al número conocido como $\boldsymbol{\pi}$.

$$\frac{L}{D} = \pi \Longrightarrow L = \pi.D = 2.\pi.r$$

Luego, la medida en radianes de un ángulo de giro completo de 360° será:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

La medida en radianes de un ángulo llano, que es la mitad de 360° será 360°/2, es decir:

$$180° = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

La medida en radianes de un ángulo recto de 90° es de $\pi/2$ radianes.

Resumiendo, observamos la siguiente tabla:

Ángulo	**Sistema Sexagesimal**	**Sistema Circular**
Giro completo	360°	2π
Llano	180°	π
Recto	90°	$\pi/2$

NOTA: *π es aproximadamente igual a 3,1415. Un ángulo de π radianes **equivale** a 180°. Pero* $\boldsymbol{\pi \neq 180°}$

Actividad:

a) Expresar en radianes las medidas de los siguientes ángulos utilizando fracciones de π.

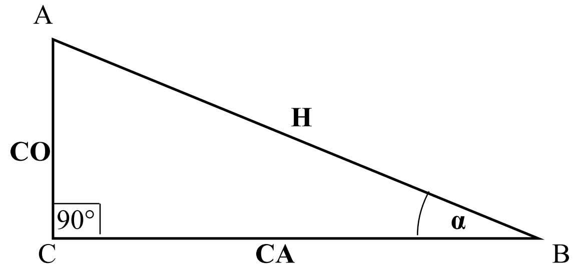
180° 45° 90° 30° 60° 75° 120° 220° 315° 360°

b) Expresar en grados sexagesimales los siguiente ángulos medidos en radianes.

$5/4\,\pi$ $7/2\,\pi$ $2/3\,\pi$ $3/2\,\pi$ $25/12\,\pi$ $8/3\,\pi$ $\pi/2$ $\pi/4$ $4/3\,\pi$ π

5.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

A partir de cualquier ángulo agudo α (menor a 90°) es posible construir un triángulo rectángulo ABC como se observa en la siguiente figura:



Llamaremos *cateto opuesto* al lado AC, *cateto adyacente* al lado CB e *hipotenusa* al lado AB.

Teniendo en cuenta la figura geométrica y los ángulos formados en cada uno de sus vértices, es posible obtener una serie de razones que reciben el nombre de **razones trigonométricas** conocidas como **seno**, **coseno** y **tangente**. A saber:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Estas razones trigonométricas dependen sólo del ángulo α formado y no de las medidas de los lados del triángulo construido.

También se definen las **razones trigonométricas recíprocas** de las anteriores llamadas, **secante**, **cosecante** y **cotangente**.

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{H}{CO} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{H}{CA} \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{CA}{CO}$$

Todas éstas relaciones serán siempre válidas cuando no se anulen los denominadores.

Actividad:

Hallar una relación que involucre solo al seno, coseno y tangente……………………………………
………..

El **Teorema de Pitágoras** es un teorema que nos permite relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de ellos y queremos saber el valor del tercero.

También nos sirve para comprobar, conocidos los tres lados de un triángulo, si un triángulo es rectángulo, ya que si lo es, sus lados deben cumplirlo.

Este teorema enuncia que: *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*, es decir:

$$\boldsymbol{H^2 = CO^2 + CA^2}$$

A partir de ésta, como corolario también se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$H = \sqrt{CO^2 + CA^2} \qquad CO = \sqrt{H^2 - CA^2} \qquad CA = \sqrt{H^2 - CO^2}$$

Si dividimos miembro a miembro por H^2 el teorema de pitágoras, tenemos lo siguiete:

$$\frac{CO^2}{H^2}+\frac{CA^2}{H^2}=\frac{H^2}{H^2}\Rightarrow\left(\frac{CO}{H}\right)^2+\left(\frac{CA}{H}\right)^2=\left(\frac{H}{H}\right)^2$$

Si nos remitimos a las razones trigonométricas, los valores entre paréntesis coinciden con:

$$\boldsymbol{sen^2\alpha+cos^2\alpha=1}$$

Es la denominada **identidad pitagórica**. Esta identidad, por ejemplo, nos permite calcular las funciones trigonométricas de un ángulo α sabiendo que es agudo.

Ejemplo:

Sabiendo que el ángulo α es agudo y que $sen\,\alpha=3/5$ calcular las demás funciones trigonométricas.

Luego, si $sen^2\alpha+cos^2\alpha=1\;\Rightarrow\;cos^2\alpha=1-sen^2\alpha\;\Rightarrow\;|cos\,\alpha|=\sqrt{1-sen^2\alpha}$

Y como $\alpha<\frac{\pi}{2}\;\Rightarrow\;|cos\,\alpha|=cos\,\alpha\;\Rightarrow cos\,\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

Análogamente:

$$\boldsymbol{tg\,\alpha}=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{3/5}{4/5}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\qquad\boldsymbol{cosec\,\alpha}=\frac{1}{sen\,\alpha}=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

$$\boldsymbol{cotg\,\alpha}=\frac{1}{tg\,\alpha}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\qquad\boldsymbol{sec\,\alpha}=\frac{1}{cos\,\alpha}=\boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

Actividad:

Sabiendo que $cos\,\alpha=2/3$*, hallar las demás relaciones trigonométricas del ángulo α..*………….
……………………………………………………………………………………………………..

5.3. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Con frecuencia se utilizan expresiones que vinculan a cada una de las relaciones trigonométricas con las demás para poder utilizar, en cada caso, la expresión más conveniente.

Por ejemplo, podríamos expresar la $tg\,\alpha$ en función sólo del $cos\,\alpha$ de la siguiente manera:

$$tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\;y\;utilizando\;la\;identidad\;pitagórica\;\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}{cos\,\alpha}$$

Análogamente, podemos expresar el $cos\,\alpha$ en función de la $tg\,\alpha$.

$tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\Rightarrow tg^2\,\alpha=\frac{sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}\Rightarrow tg^2\,\alpha=\frac{1-cos^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}\Rightarrow tg^2\,\alpha=\frac{1}{cos^2\,\alpha}-1\Rightarrow 1+tg^2\,\alpha=\frac{1}{cos^2\,\alpha}\Rightarrow\frac{1}{1+tg^2\,\alpha}=cos^2\,\alpha\Rightarrow|cos\,\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

Actividad:

Demostrar que:

$$sen^2\alpha = 1 - \frac{cotg^2\alpha}{cosec^2\alpha}$$

……

Las siguiente identidades son de utilidad para distintos procedimientos, como cálculos de límites e integrales. No es necesario memorizarlas porque suelen estar incluidas en tablas de derivadas, integrales, etc.

Aquí simplemente enumeramos algunas de ellas.

Para α y β cualesquiera se cumple:

$$sen\ (\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha . cos\ \beta \pm cos\ \alpha . sen\ \beta$$
$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \alpha . sen\ \beta$$
$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \alpha . sen\ \beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha . tg\beta}$$

Para cualquier α se cumple:

$$sen\ (2\alpha) = 2. sen\ \alpha . cos\ \alpha$$
$$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg\ (2\alpha) = \frac{2. tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2}$$

$$sen^2\alpha = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2}$$

Actividad:

*Verificar las siguientes identidades (*se aconseja trabajar en cada miembro de la igualdad sustituyendo las expresiones por otras identidades conocidas hasta llegar a una igualdad evidente*).*

a) $sen\ \alpha . sec\ \alpha + 1 = \frac{sen\ \alpha + cos\ \alpha}{cos\ \alpha}$

b) $sec\ \alpha - tg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{1 + sen\ \alpha}$

c) $sen^2\alpha = 1 - \frac{cotg^2\alpha}{cosec^2\alpha}$

5.4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son las funciones establecidas con el fin de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos. Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras de muchas aplicaciones.

Se grafican en un par de ejes cartesianos cuyos valores de la variable "x", son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio 1).

La fórmula general de éstas funciones es:

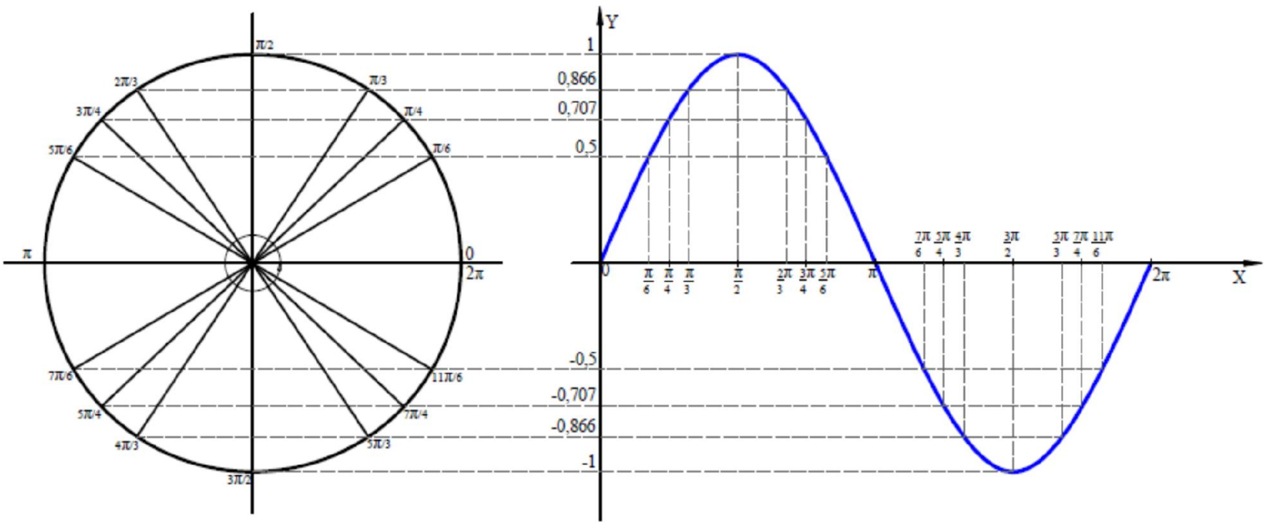
$$f(x) = A.sen[B.(x-h)] + k$$

De donde, en lugar del seno, puede ser coseno o tangente.

5.4.1. Función seno

Vamos a representar la función $f(x) = sen\,(x)$ con ayuda de la circunferencia trigonométrica y reflejando el seno de diferentes ángulos en un par de ejes cartesianos.

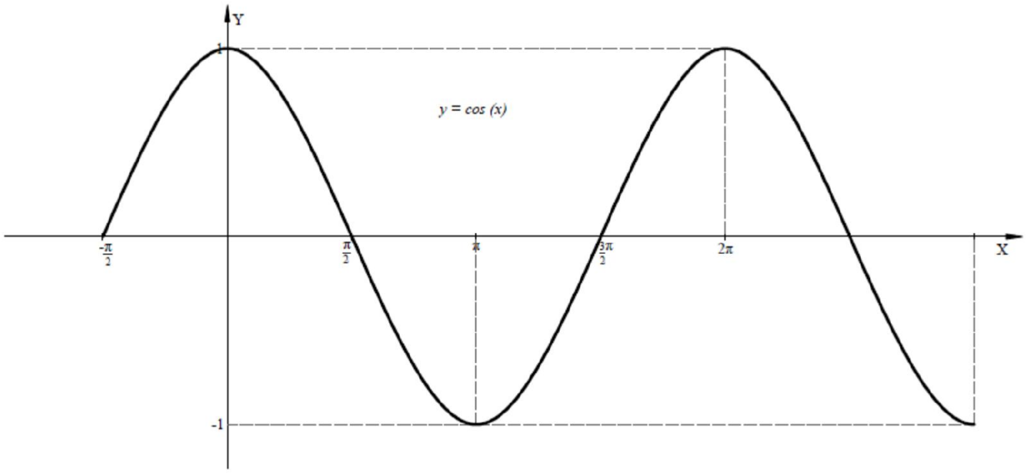
x	$sen\,(x)$
0°	0
π/6 = 30°	0,5
π/4 = 45°	$\sqrt{2}/2$
π/3 = 60°	$\sqrt{3}/2$
π/2 = 90°	1
2π/3 = 120°	$\sqrt{3}/2$
3π/4 = 135°	$\sqrt{2}/2$
5π/6 = 150°	0,5
π = 180°	0
7π/6 = 210°	-0,5
5π/4 = 225°	-$\sqrt{2}/2$
4π/3 = 240°	-$\sqrt{3}/2$
3π/2 = 270°	-1
5π/3 = 300°	-$\sqrt{3}/2$
7π/4 = 315°	-$\sqrt{2}/2$
11π/6 = 330°	-0,5
2π = 360°	0



Para éstas funciones, se colocan en el eje de las abscisas los valores de los ángulos que se van formando en la circunferencia desde 0° hasta 360°. Los valores del seno se repiten cada 2π radianes (360°), éste valor se llama **período** de la función y está definida para todo “x” pertenecientes a ℝ. Esta gráfica recibe el nombre de **sinusoide**.

5.4.2. Función coseno

Observamos ahora en la siguiente figura, la gráfica de la función coseno que, al igual que la sinusoide es una función contínua definida para todos los valores de "x" pertenecientes a ℝ. Al ser $cos\, 0° = 1$, ésta grafica se encuentra desplazada 90° hacia la izquierda con respecto a la sinusoide.



De la misma manera en que se trabajó para obtener la sinusoide, se obtiene la **cosinusoide** con la ayuda de una tabla de valores.

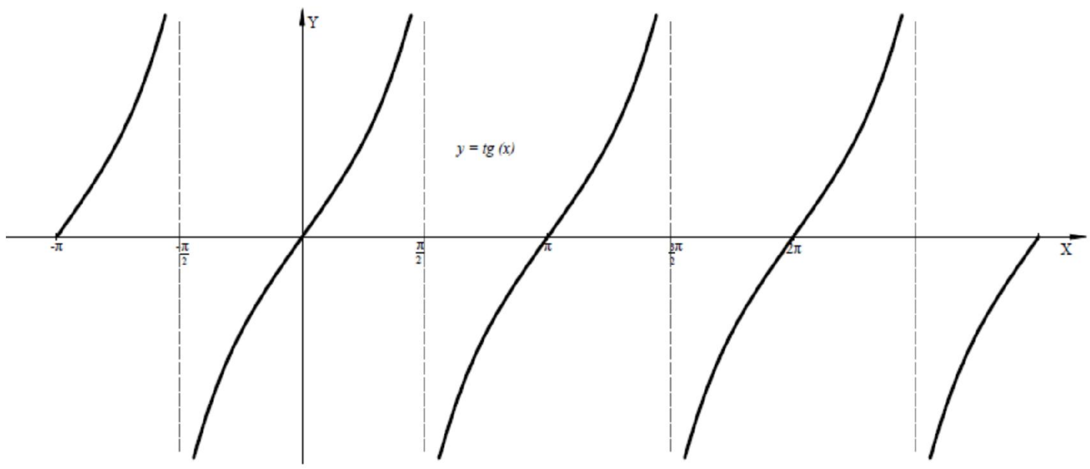
5.4.3. Función tangente

Esta función, no está definida para los valores en los que el $cos\,(x) = 0$ por lo cuál, en esos valores de "x" la gráfica presentará asintotas verticales. Por ésta razón, el dominio de la función estará dado por:

$$Df: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi \; con \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Las asíntotas verticales se encontrarán en los valores de $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ y los valores de la tangente se repiten cada π radianes (180°).

A continuación, se presenta la gráfica de $f(x) = tg\,(x)$.



5.5. ANÁLISIS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Observaremos algunos elementos que componen la fórmula general de las funciones trigonométricas.

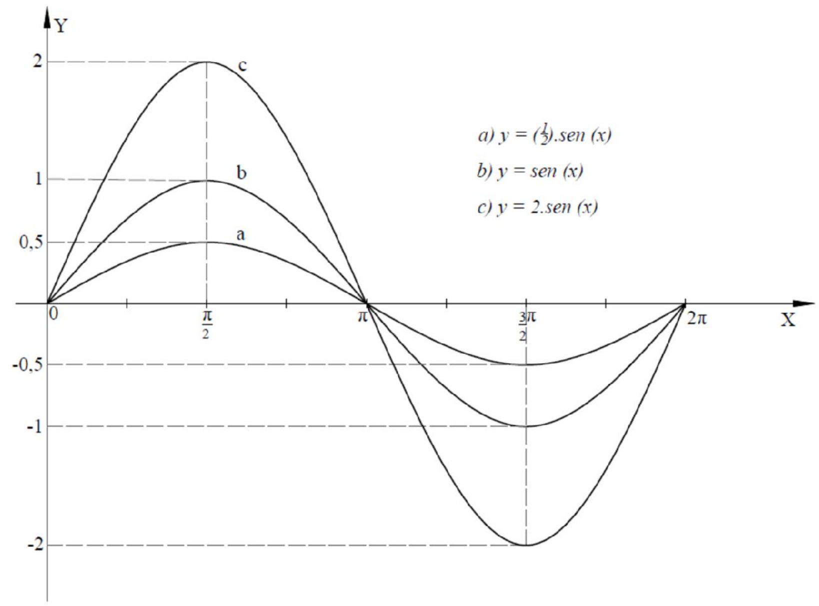
Siendo:

$$\boldsymbol{f(x) = A.sen[B.(x - h)] + k}$$

A = <u>Amplitud:</u> Es la distancia entre el punto mas alejado de una onda y el punto medio o de equilibrio.

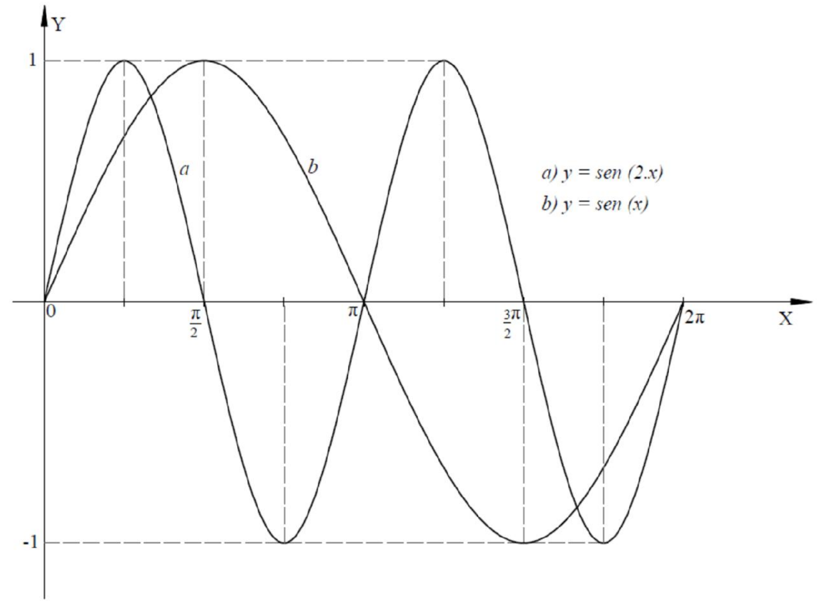
$$Si\ A > 1 \text{ ó } A < -1 \ \Rightarrow dilatación\ o\ estiramiento$$
$$Si\ -1 < A < 1 \ \Rightarrow contracción$$

<u>Ejemplo:</u>



B = <u>Frecuencia:</u> Es el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier evento periódico.

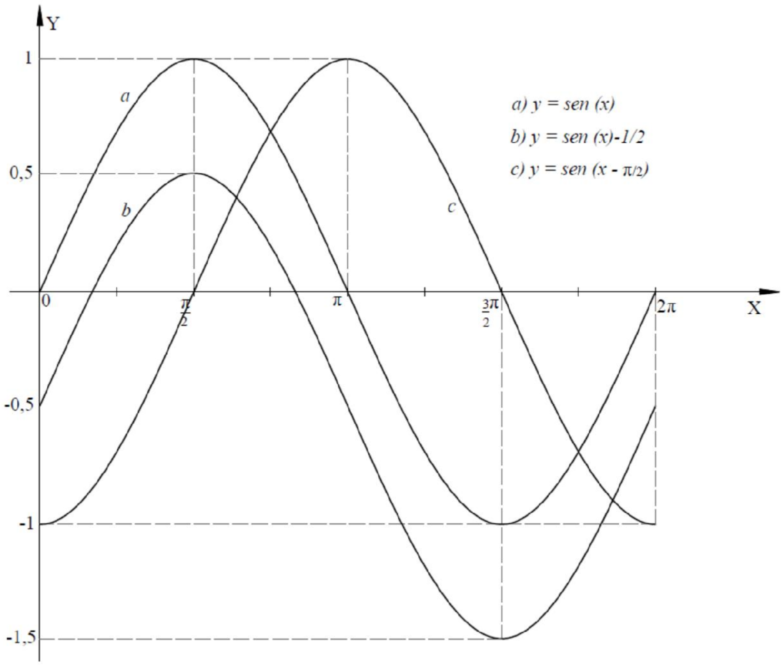
<u>Ejemplo:</u>



$\boldsymbol{k}$ = <u>Desplazamiento vertical:</u> Lo mismo que ocurre con las demás funciones, éste valor indica un desplazamiento vertical de la gráfica hacia arriba ($\boldsymbol{k > 0}$) o hacia abajo ($\boldsymbol{k < 0}$), es decir, se mueve el eje de las abscisas.

$\boldsymbol{h}$ = Desplazamiento horizontal: Tambien denominado **desfase**, indica un desplazamiento horizontal de la gráfica hacia la izquierda ($\boldsymbol{h} > \boldsymbol{0}$) o hacia la derecha ($\boldsymbol{h} < \boldsymbol{0}$) sobre el eje de las abscisas.

Ejemplo:



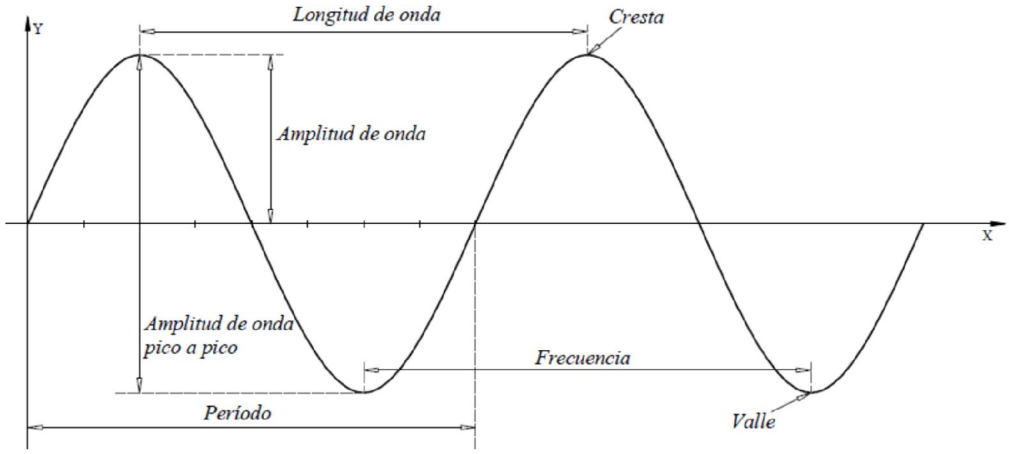
Actividad:

Graficar la siguiente función por tabulación y comprobar con lo visto anteriormente:

$$f(x) = 3.\left[cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2 \quad entre - 2\pi < x < 2\pi$$

……….

Resumiendo, los elementos que componen a las sinusoides y cosinusoides se muestran en el siguiente gráfico:



Guía de Trabajos Prácticos
Matemática

Guía de trabajo N° 1

CONJUNTOS NUMERICOS E INTERVALOS

1) Colocar V o F según corresponda trabajando en $\mathbb{R}$. Justificar las respuestas con la propiedad correspondiente y en caso de ser falso, resolver correctamente.

a) ☐ $\sqrt{64.9} = 8.3 = 24$

b) ☐ $\sqrt{100-64} = 10-8 = 2$

c) ☐ $\sqrt{100:25} = 10:5 = 2$

d) ☐ $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{a}$

e) ☐ $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[5]{a^6}$

f) ☐ $\sqrt{4^3} = 2^3$

g) ☐ $\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2.(-4)} = \sqrt[3]{-8} = -2$

h) ☐ $\sqrt{-2}\,.\sqrt{-8} = \sqrt{16} = 4$

i) ☐ $si\ a > b\ y\ b > 0 \ \Rightarrow \sqrt[4]{a^8.b^2} = a^4.b$

j) ☐ $2.\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{2} = -3.\sqrt[5]{4}$

2) Realizar las operaciones y expresar el resultado como una potencia de exponente racional.

a) $(2^{-1/4}\,.\,2^{1/10})^2 =$

b) $2^4\,.\,2^{-1/2}\colon\left(2^{1/3}\,.\,2^{-3/2}\right) =$

c) $3^{1/5}\,.\,(1/3)^{2/5}\ :\ 3^{-1/5}\,.\,9^{1/5} =$

d) $\frac{(1/2)^{-3/2}\ .\ 2^1}{3^{-2/3}\ .\ (1/3)^{-2/3}} =$

e) $3\,.\,((2.3)^{-1}.\,1/2^3)^{-1}.\,(3.\,2^2)^{-2} =$

f) $\left(\frac{\left(2\,.\,\frac{3}{9}:3\right)^{-2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^{2}.\,\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}\right)^{-1} =$

g) $\left(\frac{2^3}{a^2} : \frac{c^3}{3^2}\right)^{-2} : \left(\left(\frac{c^3}{a^2}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{b^{-1}}\right)\right)^{-1} =$

h) $\left(\frac{\left(10.x^{-3}.y.z\right)^{-4}}{(5.x.y^{-2}.z)^{-2}}\right)^{-2} =$

i) $\frac{a^2\ .\ (2^3\ .\ c^{-2})}{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^{3}\right)^{-2}} - 2.\left(\frac{c}{(a^2\ .\ 2^{-1})^2}\right)^{-2} =$

j) $(90.\,3^{2n} + 12.\,3^{2n+1} + 2.\,3^{2n+2})\,.\left(\frac{3^{-(n+1)}}{4}\right)^2 =$

3) Hallar el valor exacto de los siguientes cálculos.

a) $\sqrt{5}-\frac{1}{2}\,.\sqrt{5}+3\sqrt{5}=$

b) $\sqrt{2}-\sqrt{200}+\sqrt{72}=$

c) $\sqrt{3}+\sqrt[6]{27}-\sqrt[4]{9}+\sqrt[8]{6}=$

d) $\sqrt[3]{5}-\frac{1}{2}\,.\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{5000}=$

e) $\sqrt{50}\,.\sqrt{2}=$

f) $2\sqrt{54}:\left(-3\sqrt[3]{18}\right)=$

g) $\sqrt[3]{2}\,.\left(\sqrt[6]{4}\right)^2+2\sqrt{0{,}25}=$

h) $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}\,.\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}=$

i) $\sqrt{45}+\frac{1}{5}\sqrt{1225}-\sqrt{20}=$

j) $2x\sqrt{8}-5\sqrt{32x^2}=$

k) $7\sqrt{18x}-3\sqrt{50x}=$

l) $\left(3\sqrt{40}\;-\;\sqrt{250}\right)^{-2}=$

m) $4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{135}+3\sqrt[6]{1600}-15\sqrt{\frac{1}{25}}=$

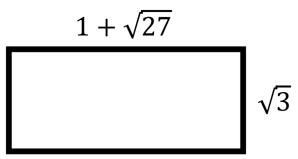
n) $(\sqrt{3}+4)^2-\left(1+4\sqrt{3}\right)^2=$

o) $\frac{3}{2}.\sqrt[3]{2x^6}-\frac{1}{6}.\sqrt[3]{16x^3}+\frac{2}{5}.\sqrt[3]{2}=$

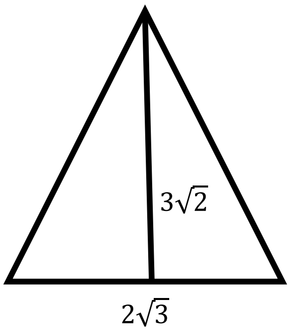
p) $\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{625}=$

4) Hallar el valor exacto del perímetro y del área de las siguientes figuras. Todas las medidas están dadas en centímetros.

a)



b)



5) Obtener en cada caso una fracción equivalente sin radicales en el denominador.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}=$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}=$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=$

d) $\frac{1}{5+\sqrt{2}}=$

e) $-\frac{4}{4-\sqrt{5}}=$

f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{15}} =$
g) $\frac{9}{\sqrt{14}+\sqrt{10}} =$
h) $\frac{-2\sqrt{5}}{-2+\sqrt{6}} =$
i) $\frac{4}{\sqrt[3]{5^8}} =$
j) $\frac{5}{\sqrt{6}-3\sqrt{6}+8\sqrt{6}} =$
k) $\frac{4ab}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} =$

6) Expresar los radicales como potencia y resolver:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

b) $5\sqrt{5}:\sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-1/3}} =$

c) $(\sqrt{6}.\sqrt[4]{12})^3 : 18^{1/2} =$

d) $\frac{-100^{1/2}}{\sqrt[3]{10:\sqrt{0{,}001}}} =$

e) $\frac{1{,}94-\sqrt[3]{(-1)^5}-\left(\frac{50}{27}\right)^{-1}}{\frac{\sqrt{24}\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt{75}}} =$

f) $\sqrt[3]{9}\,.\left(0,\widehat{39}\,.\,\frac{11}{11+2}\right)^{1/3}.\sqrt[3]{9} =$

g) $\sqrt[3]{0{,}027}\,.\,(0{,}81)^{-1/2}+\frac{1}{2+\sqrt{(-1)^2}}\,.\sqrt{\frac{0{,}16}{1/25}} =$

h) $\sqrt[b]{\sqrt[a]{\sqrt{y^c}}} =$

i) $\sqrt{a^4}.\sqrt{45.\sqrt{45.\sqrt{45}}} =$

j) $\sqrt{\frac{4}{9}xy}\,.\sqrt[3]{\frac{27}{125}yz^2}\,.\sqrt[6]{\frac{5}{2}x^3yz^2} =$

7) Resolver las siguientes inecuaciones y expresar la solución con notación de intervalos. Graficar en la recta real.

a) $|x-2| \leq 3$
b) $|x+3| \leq 1$
c) $|x-1| \geq 3$
d) $|x-4| < 1$
e) $|1-2x| > 3$
f) $|2-x| \leq 3$

g) $\left|\frac{2-x}{4}\right| \geq 1$
h) $\left|\frac{x}{4} - 5\right| \leq 2$
i) $\frac{1}{5} - 2|x+1| < 0$
j) $-\frac{1}{4}|3-2x| + 3 \geq 1$
k) $-2 + |2x-4| \leq 10$
l) $5 + |3x-4| \leq 12 - 4x$

8) Resolver gráfica y analíticamente las siguientes operaciones entre intervalos.

a) $[1;5] \cap [2;7]$
b) $\{(-3;-1) \cup [7;8]\} \cap [0;6]$
c) $x \in (-\infty;3) \wedge x \in (-3;+\infty)$
d) $x \in (-2;2) \wedge x \in [1;+\infty)$
e) $|x| < 6 \wedge |x-3| \geq 1$
f) $|x-4| \leq 5 \wedge |x-1| \geq 4$
g) $|x+2| > 3 \wedge |x-2| \leq 5$

9) Representar gráficamente cada uno de los siguientes números en el plano complejo.

a) $Z_1 = 3 + 5i$
b) $Z_2 = i$
c) $Z_3 = (3;0)$
d) $Z_4 = -2 + 7i$
e) $Z_5 = (-2;0)$
f) $Z_6 = (0;-4)$
g) $Z_7 = -5 - \sqrt{2}i$
h) $Z_8 = (5 + \sqrt{2}i)$
i) $Z_9 = -6 + 3i$
j) $Z_{10} = -6 - 3i$
k) $Z_{11} = (\sqrt{2}; 45°)$
l) $Z_{12} = es - Z_2$
m) $Z_{13} = 3$
n) $Z_{14} = 2 + i + i$

10) Hallar el valor de "x" e "y" que verifiquen las igualdades.

a) $2x + (y+2)i = (4+5i)$
b) $3x - 1 + (1-y)i = (2+3i)$
c) $3y + 2xi = (6+4i)$

11) Obtener el número $Z = a \pm bi$ complejo, que resulte de las siguientes operaciones.

a) $2i + 8i + (-3i) =$
b) $5i + 1 - \frac{1}{3}i - 5 + 2i =$
c) $(3-i) - (4+3i) + (1-2i) =$
d) $\left(2 - \frac{1}{5}i\right) - \left(\frac{1}{2} + 4i\right) - (3+i) =$

12) Siendo $Z_1 = \left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}i\right)$; $Z_2 = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}i\right)$; $Z_3 = \left(-2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}i\right)$. Calcular:

a) $Z_1 + Z_2 - Z_3 =$
b) ${Z_1}^2 =$
c) ${Z_3}^2 =$
d) ${Z_2}^3 =$

13) Calcular.

a) $(3+2i)^2 =$
b) $(2-5i)^2 =$
c) $(2+i)^3 =$
d) $(2i-1)^3 =$

14) Resolver.

a) $(-3+2i).(-3-2i) =$
b) $(\sqrt{3}+i).(2\sqrt{3}+4i) =$
c) $(1/2+\sqrt{3}i).(1/2-\sqrt{3}i) =$
d) $(\sqrt{8}-\sqrt{3}i).(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) =$
e) $(\sqrt{2}i-1).(i+4\sqrt{2}) =$

15) Encontrar el número complejo que resulte de las siguientes operaciones.

$a)\ \dfrac{4+2i}{4-2i} =$

$b)\ \dfrac{2+i}{3-2i} =$

$c)\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i} =$

$d)\ \dfrac{\sqrt{2}-i}{1-\sqrt{2}i} =$

$e)\ \dfrac{2-i}{3+i} - \dfrac{1}{2i} =$

$f)\ \dfrac{19-4i}{2-5i} + \dfrac{3+2i}{i} =$

$g)\ \dfrac{(2-3i)^2-(2+3i).(3-2i)}{3i^{17}-1} =$

$h)\ \dfrac{(3+i).(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}} + \dfrac{4}{5i} =$

Guía de trabajo N° 2
FUNCIONES POLINOMICAS Y RACIONALES

1) Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 + x - 1, Q(x) = x^3 - 5$ y $R(x) = 0{,}3x + 4$. Hallar si es posible:

a) $P(x) + Q(x) =$
b) $Q(x) - R(x) =$
c) $R(x) - Q(x) =$
d) $P(x).Q(x) =$
e) $2.P(x).R(x) =$
f) $Q(x): P(x) =$
g) $R(x): 3Q(x) =$
h) $x.Q(x): R(x) =$

2) Determinar si los números propuestos son ceros de la función polinomica: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$

a) 0 b) -2 c) 1

3) Divida para determinar si los siguientes binomios son factores del polinomio: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

a) $x - 2$
b) $x - 3$
c) $x + 1$

4) Aplique la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto en los siguientes casos.

a) $(2x^4 + x - 1): (1 - x) =$
b) $(12x^4 - 30x^2 + 30x - 12): (6x + 12) =$
c) $(x^3 + 2x - 3x^2): (2 + x) =$
d) $(14x^5 + 8x^3 - 2x^2 + 2x): (2x^2 - 2x) =$

5) Dividir cada polinomio P/D y luego expresar la comprobación: $P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$ siendo $Q(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto.

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$

1) $D(x) = x - 2$
2) $D(x) = x - 3$
3) $D(x) = 4 + x$

b) $P(x) = 5x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 3$

1) $D(x) = 2x^2 - x + 1$
2) $D(x) = x^2 - x^3$
3) $D(x) = x^5 + 2$
4) $D(x) = 2x(1 - x^2 + x)$

6) Determinar el polinomio P que dividido por $x - 2$ da cociente $x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ y resto x.

7) Sea $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 20$

a) Encontrar $P(-2), P(2)\ y\ P(-1)$.
b) Encontrar el resto cuando se divide P por $(x+2)$.
c) Comparar las respuestas anteriores.

8) Las raíces del polinomio $P(x) = x^3 + \boldsymbol{m}x^2 + \boldsymbol{n}x + \boldsymbol{p}$, con **m**, **n** y **p** reales son: **1**, **2** y **3**.
Entonces el cociente de $P(x)$ por $(x-3)$ es:

a) (   ). $x^2 + 2$
b) (   ). $x^2 - 3x + 2$
c) (   ). $x^2 - 2x + 1$
d) (   ). $x^2 + 3x + 2$
e) (   ) NRC.

9) Determinar si el número 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$. En caso de serlo, indicar el orden de multiplicidad y las demás raíces.

10) Calcular el valor de "b" para que el polinomio $L(x) = x^3 - bx^2 + 5x - 1$ sea divisible por $(x-2)$.

11) Factorear en el conjunto de los números reales si es posible, los siguientes polinomios.

a) Extracción del factor común.

i) $A(x) = 4x + 20$
ii) $B(x) = 3y^2 - 9y$
iii) $C(x) = 3y(2x+5) - 4x(2x+5)$
iv) $D(x) = (a-2b)(2a+b) - (a-2b)(5b-3)$
v) $E(x) = 8x^2y + 2x - 8xy + 2$
vi) $F(x) = 3x^2y - 2x^2y + 6x^2y + x^3$
vii) $G(x) = \frac{2x^3-6x^2}{5} - \frac{3x^2-x}{10}$
viii) $H(x) = \frac{5x^4y}{6} - \frac{7x^2y^2}{2}$
ix) $I(x) = 2y + 2j + 3xy + 3xj$

b) Trinomio cuadrado prefecto.

i) $P(y) = y^6 + a^4 + 2a^2y^3$
ii) $Q(x) = x^2 - 8x + 16$
iii) $R(m) = 9m^2 + 12mn + 4m^2$
iv) $S(xy) = x^2y^2 + 8xy + 16$
v) $T(x) = 9x^4 - 30x^3y + 25xy$
vi) $U(x) = x^2 - 6x + 9$
vii) $V(a) = a^{18} + 81 + 18a^9$
viii) $W(x) = 16x^4 + 24x^2y^3 + 9y^6$
ix) $X(b) = 9b^2 - 30ab + 25a^2$

c) Diferencia de cuadrados.

i) $J(x) = 2x^2 - 1$
ii) $K(y) = 3/4y^2 - 9$
iii) $L(x) = a^2x^2 - 8b^2$
iv) $M(y) = (y+2)^2 - 25$
v) $N(x) = 49x^4 - \frac{16}{25}$
vi) $O(b) = 8b^6 - 2b^2$

d) Suma o diferencia de dos potencias de igual grado.

i) $A(x) = x^3 + a^3$
ii) $C(x) = 125 - x^3$
iii) $E(y) = 0{,}01 - y^4$
iv) $G(z) = 1 + z^5$
v) $I(x) = 8x^3 - 27$
vi) $K(x) = x^3 + (x-1)^3$
vii) $M(y) = (5y-1)^3 - (2y+3)^3$

e) Factorización de trinomios de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c reales.

i) $P(x) = x^2 - 12x - 45$
ii) $R(x) = 2x^2 - 15x + 56$
iii) $T(x) = 1/2x^2 - 4x - 60$
iv) $V(x) = x^2 + 14x + 24$
v) $Z(x) = 3x^2 - 9x - 30$

12) Expresar los siguientes polinomios como producto de factores primos irreducibles normalizados.

a) $P(x) = x^2 - \frac{1}{49}$
b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
c) $P(x) = x^3 + 8$
d) $P(x) = 2x^2 - 18$
e) $P(x) = x^2 + 5x + 16$
f) $P(x) = 2x^3 - 8x$
g) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
h) $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
i) $P(x) = 9x^4 - 4x^2$
j) $P(x) = 2x^5 - 32x$
k) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
l) $P(x) = 4x^2 + 4xy + y^2$

13) Factorizar, operar y simplificar.

a) $\frac{3x^2-3x}{2x^3-2x^2} =$

b) $\frac{x^2-4}{2x-x^2} =$

c) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1} =$

d) $\frac{x^6+1}{x^2+1} =$

e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} =$

f) $\frac{4-x^2}{2x-4} . \frac{6}{x^2+4x+4} =$

g) $\frac{x^4-16}{3x+6} : \frac{(1/3)x^2+(4/3)}{x-2} =$

h) $\frac{2x}{x.(1-x^2)} : \frac{1}{1+x} =$

i) $1 - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} =$

j) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) =$

k) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} - \frac{x+1}{x-1} =$

14) La expresión:

$$\frac{(1/4)x^2 - y^2}{(1/4)x^2y - (1/2)xy^2} \, .3xy$$

Factorizada y simplificada es:

i) ( ). $\frac{1}{2}x + y$
ii) ( ). $\frac{1}{2}x - y$
iii) ( ). $6xy$
iv) ( ). $\frac{1}{6}x^2y$
v) ( ). NRC

15) Calcular utilizando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 64 = x$
b) $\log_2 8 = x$
c) $\log_x 125 = 3$
d) $\log_2 x = 3$
e) $\log_x 16 = 4$
f) $\log_{1/2} 4 = x$
g) $\log_5 x = 2$
h) $\log_3 x = 1$
i) $\log_x 81 = 4$

16) Escribir la expresión exponencial equivalente al logaritmo y resolver.

a) $\log_2 64 + \log_3 9 - 2\log_5 25 =$
b) $2\log_2 8 - 2\log_3 27 + 3\log_5 5 =$
c) $\log_2 1/4 - \log_2 \sqrt{2} + 2\log_3 1 =$
d) $\log_3 1/9 + 3\log_2 \sqrt[3]{2} + 4\log_7 1 =$

17) Resolver las siguientes ecuaciones logaritmicas.

a) $\log_4(3x - 2) = 2$
b) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$
c) $\log_4(x + 3) - \log_4 x = 1$
d) $5^{\log_5 x} = 3$
e) $2^x + 3.2^x = 1$
f) $3^{2x} + 9^x = 162$
g) $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 7/2$
h) $\log_2(x + 1) + 3 = \log_2(9x + 4)$
i) $\sqrt[3x-1]{9} = 9^x$
j) $\sqrt[x+1]{8^{(-x/3)}} = \sqrt{3.4^x + 2^{2x}}$
k) $\frac{5^{3x+1}}{5^{1+x}} - 25^{x+1}.\frac{5^{2x-1}}{5^{1+3x}} = 20$
l) $2\log(x + 1) - \log 2 = \log(x^2 - 1)$
m) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$
n) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$
o) $\log\sqrt{3x + 1} - \log\sqrt{2x - 3} = 1 - \log 5$
p) $(x^2 - 5x + 9).\log 2 + \log 125 = 3$

Guía de trabajo N° 3
ECUACIONES

1) Resolver las siguientes ecuaciones y verificar la solución encontrada.

1. $2x + 7 = 0$
2. $6x^2 - 384 = 0$
3. $x^2 - 7x = -12$
4. $x - 2 = x + 7$
5. $\frac{1}{2}x + 5x^2 - 6x = \frac{1}{2}x^2 + x$
6. $(3/4).(2x + 4) = x + 19$
7. $2(2x^2 - 5) = 3(2 - 3x^2)$
8. $1 - 3x(1 - x) = 0$
9. $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$
10. $\frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{x+4}{x+1}$
11. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1$
12. $\frac{9}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+3}$
13. $6x^2 + 18x + x - 23 = 7x + 12x + 31$
14. $\frac{3x-1}{7} - \frac{2-4x}{3} = \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$
15. $(2x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
16. $\frac{x-7}{5} - \frac{x-11}{6} + \frac{x-10}{7} = 2$
17. $(2x - 5)\frac{2x-3}{2} = 0$
18. $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{6} - x = \frac{2-3x}{2} - 1$
19. $3\left(\frac{11x}{6} - x\right) - 4 = 2x - 3\left(1 - \frac{x}{6}\right)$
20. $(x - 1).(x + 1) = 2(x^2 - 13)$
21. $5\left(\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5}\right) + 1 = 2x - 2(x - 1)$
22. $(3x - 2)^2 = (2x + 1).(2x - 1) - 2$
23. $6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x - 2)$
24. $2 - \left[-2(x + 1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$
25. $(x^2 - 4).(2x - 6).(x + 3) = 0$
26. $(x - 3).\frac{2x+1}{2} = 15 - \frac{x}{2}$

2) Problemas de aplicación.

a) Si al numerador de una fracción se le suma 2, se obtiene 5/7 y si al denominador se le suma 2, se obtiene 1/3. ¿Cuál es la fracción?

b) La longitud del papel enrollado en una bobina es igual a 250 veces su ancho y éste es inferior en 0,75 m a la centésima parte del primero. Calcular el largo y el ancho del papel.

c) Una persona gasto $120 comprando biromes de $6 cada una y lapiceras de $9 cada una. ¿Cuántas biromes y lapiceras compró si en total recibió 15 objetos?

d) Dos termómetros, uno Celsius y otro Reamur, se sumergen en una vasija con agua. La suma de temperaturas que marcan los dos termómetros es de 63°. Se sabe que los grados centígrados y Reamur estan en relacion de 5/4. ¿Cuántos grados marca cada uno de los termómetros?

e) El perímetro de un rectángulo es de 24 cm. La diferencia entre la base y la altura es de 2 cm. Calcular el área.

f) En una juguetería en donde se venden bicicletas y triciclos, Juan Pablo dijo: hay 60 ruedas; Javier agregó: hay 5 bicicletas mas que triciclos. ¿Cuántos hay de cada uno?

g) Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

h) En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

i) Luis hizo un viaje en coche, el cuál consumio 20 litros de combustible. El trayecto lo hizo en dos etapas: En la primera consumio 2/3 del combustible que tenia el depósito y en la segunda etapa, la mitad del que le queda. Se pide:

   1) Litros de combustible que tenía el depósito.
   2) Litros consumidos en cada etapa.

j) Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

k) Hallar el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° mas que C y A mide 40° mas que B.

l) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Hallar la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es de 24 m^2.

m) Dos caños **A** y **B** llenan juntos una piscina en dos horas. **A** lo hace por si solo en tres horas menos que **B**. ¿Cuántas horas tarda cada uno por separado?

n) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de área uniforme. Hallar el ancho de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

o) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenia hace 13 años. Calcular la edad de Pedro.

3) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método indicado.

a) Sustitución

$$\begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4/9y = 11 \\ x = 5/3y \end{cases}$$

b) Igualación

$$\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 13y = -14 \\ 2x - 11y = -10 \end{cases}$$

c) Reducción por suma o resta

$$\begin{cases} 7x - 5y = 3 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ -8x + 5y = 2 \end{cases}$$

d) Sustitución e igualación

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 7y = -6 \end{cases}$$

4) Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas lineales. Interpretar geométricamente.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

5) Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas mixtos.

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 12 \\ y - x^2 = -6x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ -x^2 - 4y = 0 \end{cases}$

6) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución, igualación y reduccion por suma.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = 0 \\ \frac{x+2y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \frac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$

7) Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y -2.

8) Determinar el valor de “k” de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ sean iguales.

9) Encuentra el valor de “k” para que la ecuación $x^2 - \frac{k+1}{3}x + \frac{k}{9} = 0$ admita una única solución real. Encuentra dicha solución.

10) Encuentra él o los valores de “k” para que la ecuación $(k+3)x^2 - kx + 1 = 0$ tenga solución única. Para cada valor de hallado, encuentra la única solución de la ecuación.

11) Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura (con respecto del suelo) en cada instante de tiempo está dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 15t + 50$. Encuentra el instante de tiempo en la que la pelota toca el suelo.

Guía de trabajo N° 4

FUNCIONES

1) Reconocer funciones entre las siguientes relaciones y realizar la representación gráfica de cada una.

a) $R_1: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \ / \ y = 2x$
b) $R_2: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \ / \ y = (1/2)x$
c) $R_3: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N} - \{0\} \ / \ y = x + 1$
d) $R_4: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{3\} \ / \ y = 3$
e) $R_5: \mathbb{R} \longrightarrow \{3\} \ / \ y = 3$
f) $R_6: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ y = 2x + 1$
g) $R_7: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \ / \ y = x$
h) $R_8: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ y = -x - 1$
i) $R_9: \mathbb{Z}_0^- \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ y = 2 - x$
j) $R_{10}: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ y = x/2$

2) Dada la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ y = x + 3$, demostrar su biyectividad, calcular su inversa y graficar ambas en un mismo par de ejes cartesianos.

3) Dada la función $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ y = x - 11$, determinar si existe su inversa y justificar.

4) Representar las siguientes funciones reales (encontrando solo dos puntos).

a) $y = (-5/3)x + 2$
b) $y = (2/3) - x$
c) $(y - 2x)/2 = 1$
d) $x - 2y = 4$

5) Graficar las siguientes funciones y su inversa en un mismo par de ejes cartesianos. Comprobar su simetría con respecto a la recta identidad.

a) $8x + 2y - 6 = 0$
b) $4x - 3y - 12 = 0$
c) $f(x) = -2(x - 1) - 4$
d) $y^{-1} = (x/3) + (1/3)$
e) $y + 1 = \left(\frac{5-3}{6-2}\right).(x - 1)$
f) $La\ recta\ que\ pasa\ por\ (-2; 0) \wedge (0; 6)$
g) $La\ recta\ que\ pasa\ por\ (-1; 5) \wedge (3; 1)$
h) $La\ recta\ paralela\ a\ y = \left(-\frac{1}{4}\right)x + 1\ y\ pasa\ por\ (0; 0)$

6) Hallar la ecuación de la recta con pendiente igual a -3 y raíz 4. Graficar e indicar intervalos $C^+ \ y \ C^-$ y demostrar su decrecimiento en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

7) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x$ y ordenada al origen igual a -1. Demostrar su biyectividad, hallar su inversa y graficar ambas en un mismo par de ejes cartesianos.

8) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones gráficamente.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y - 3 = 0 \end{cases}$

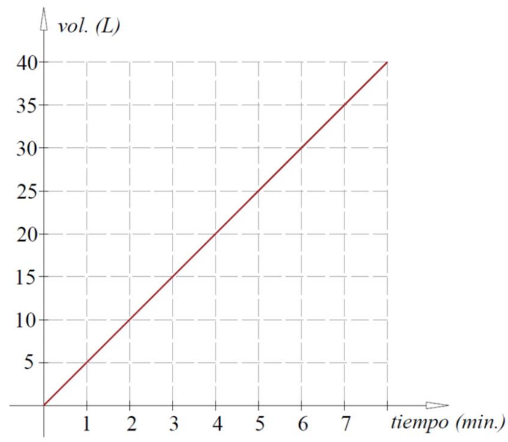
b) $\begin{cases} 2y - 3x = 1 \\ -4y + 6x = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \\ 5x - 2y = 13 \\ y = 1 \end{cases}$

9) Un auto 0 Km cuesta \$360.000 y su valor disminuye \$12.000 por año. Encontrar la función que calcule el valor del auto según sus años de uso.

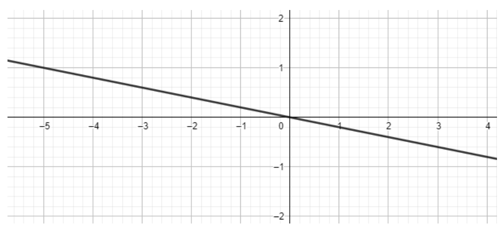
10) Un tanque de agua cubierto, al cuál no se puede observar su nivel de líquido e inicialmente se encuentra vacío, se quiere llenar utilizando una bomba con un caudal que sigue la siguiente curva:



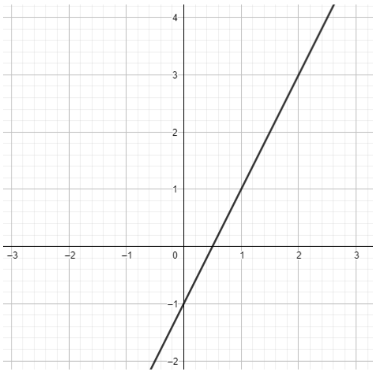
a) ¿Cuánto tardará en llenarse un volúmen de 132 L? ¿y 220 L?
b) ¿Cuánto se habrá llenado transcurridos 15,2 min? ¿y 21,2 min?
c) ¿Qué volúmen alcanza transcurridos 4,32 min?
d) ¿Qué tiempo debo esperar para llenar a 21,5 L?

11) Escribir la función lineal que representa a cada una de las gráficas:

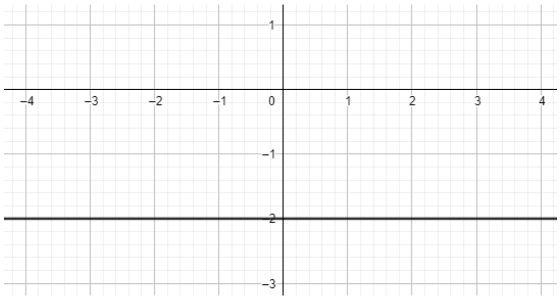
a)



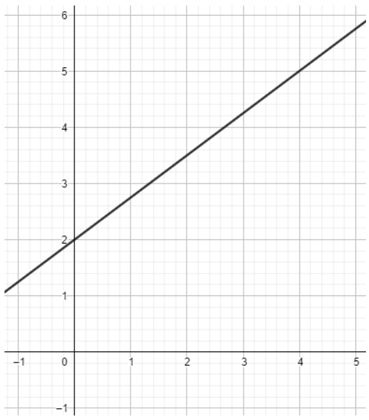
b)



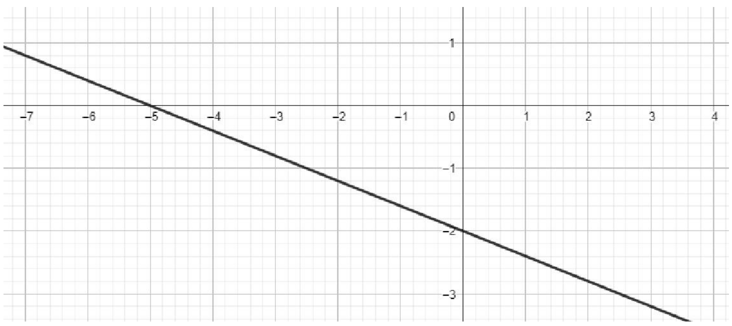
c)



d)



e)



12) Sea $-3y+6=x$, la ecuación de la recta **R**. Escribir la fórmula de una función lineal cuya representación gráfica sea:

a) Una recta **A** paralela a **R** y que pase por el punto (3;-2).

b) Una recta **B** paralela a **R** y que pase por el origen de coordenadas.

c) Una recta **F** que no sea paralela a **R** y que tenga la misma ordenada al origen que **R**.

d) Una recta **C** paralela al eje de las abscisas y que tenga la misma ordenada al origen que **R**.

Graficar para todos los casos anteriores.

13) Sea $6 - 3y = 4x$, la ecuación de la recta **T**. Escribir la fórmula de una función lineal cuya representación gráfica sea:

a) Una recta **M** perpendicular a **T** y que pase por el punto (4;2).

b) Una recta **Q** paralela a **M** con raíz en 5.

c) Una recta **H** no perpendicular ni paralela a **T**, pero que tenga la misma ordenada al origen.

Graficar **T**, **M**, **Q** y **H** en un mismo sistema de ejes cartesianos.

14) Graficar en un mismo par de ejes cartesianos, las siguientes funciones:

a) $h(x) = x^2$
b) $g(x) = 2x^2$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^2$
d) $m(x) = -x^2$
e) $q(x) = -2x^2$

¿Cómo varía el gráfico de la función según varía el valor de "a"?

15) Graficar en un mismo par de ejes cartesianos, las siguientes funciones:

a) $g(x) = (x + 1)^2$
b) $f(x) = (x - 3)^2$
c) $h(x) = -(x - 2)^2$
d) $l(x) = -(\frac{1}{2} - x)^2$

¿Cómo varía el gráfico con respecto al desplazamiento horizontal?

16) Graficar en un mismo par de ejes cartesianos, las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $g(x) = x^2 + 3$
c) $h(x) = -x^2 + 1$
d) $r(x) = x^2 - 2$

¿Qué efecto produce en la gráfica el término independiente?

17) Hallar analíticamente el vértice, eje de simetría, ordenada al origen y raíces de las siguientes funciones. Graficar luego con éstos datos obtenidos. Expresar el intervalo de la imagen de cada una.

a) $y = 2x^2 - 8x + 6$
b) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 12$
c) $y = -x^2 + 2x + 3$
d) $y = 4x^2 + 8x + 8$
e) $f(x) = 2x^2 - 1$
f) $g(x) = 3.(x-3).(x+3)$
g) $l(x) = (x+2).(x-5)$

18) Expresar las siguientes funciones polinómicas en forma canónica y graficar “sin tabla de valores”. Analizar dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, positividad y negatividad, paridad e imparidad, puntos máximos y mínimos, concavidad.

a) $y = -x^2 + 4x - 3$
b) $y - 2x - 1 = x^2$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$

19) Expresar las siguientes funciones en forma polinómica y graficar “sin tabla de valores”. Analizar luego, dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, positividad y negatividad, paridad e imparidad, puntos máximos y mínimos, concavidad.

a) $y = 2.(x+1)^2 + 3$
b) $y = (x-1)^2 + 1$
c) $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$

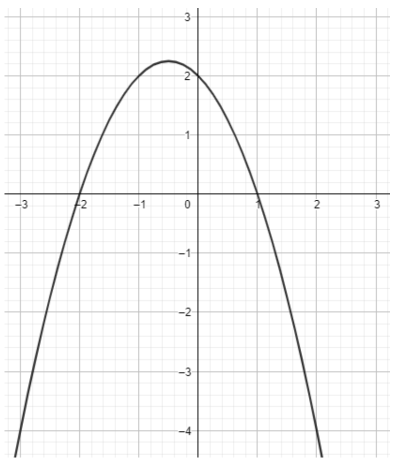
20) Una parábola tiene su vértice en $V: (1; 1)$ y pasa por el punto $(0; 2)$. Hallar su ecuación.

21) Una función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1; 1), (0; 0)\ y\ (-1; 1)$. Calcular $a, b\ y\ c$. Analizar su dominio e imagen.

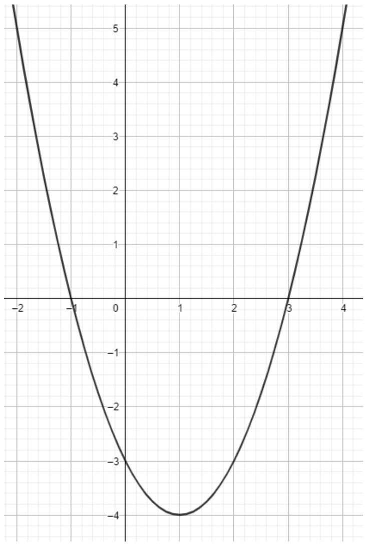
22) Hallar la ecuación de la parábola que tiene raíces en $x_1 = -3\ y\ x_2 = 5$ y ordenada al origen $y = -15/2$.

23) Hallar la ecuación de la parábola, observando las siguientes gráficas.

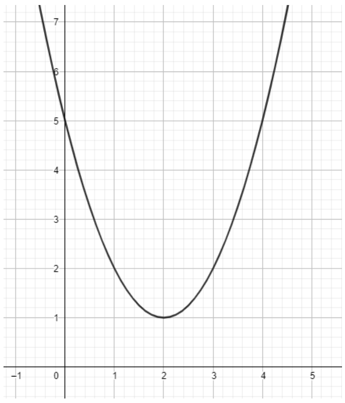
a)



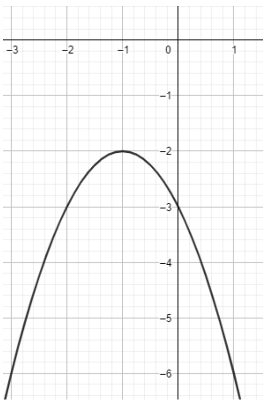
b)



c)



d)



24) Hallar “gráficamente” los valores de “x” e “y” que satisfagan la igualdad en ambas ecuaciones.

a) $\begin{cases} y + 4x - 1 = x^2 \\ y - 3x + 11 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x^2 = -5 \\ y = 3x + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 2 + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x^2 + x - 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = (x-2)^2 - 2 \\ y + x^2 = 2x + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x \\ y = 5x^2 - 10x \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 4 \\ y = 2x^2 - 10x + 8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y + 5x = x^2 + 4 \\ y + \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x - 2 \end{cases}$

25) Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 60 m/seg. A partir de cierto momento comienza a caer. La relación que existe entre el tiempo t (seg) de la piedra que está en el aire y la altura h (m) a la que se encuentra, está dada por:

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 60t + 1$$

a) Interpretar $h(0) = 1$
b) Graficar la función en un sistema de ejes cartesianos.
c) ¿Para qué valores de "t" la piedra asciende?
d) ¿Cuánto tiempo tarda desde que se lanza hasta que toca el suelo?
e) ¿En qué momento la piedra llega a la altura máxima? ¿Qué altura máxima alcanza?

26) Graficar las siguientes funciones módulo con ayuda de su fórmula general. Analizar dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, paridad e imparidad, $C^+ \; y \; C^-$, máximos y mínimos, raíces.

a) $j(x) = |3x|$
b) $k(x) = -|(1/2)x|$
c) $l(x) = |x| + 1$
d) $m(x) = |x| - 2$
e) $n(x) = |x - 3|$
f) $o(x) = -|x - 2|$
g) $p(x) = -3.|x + 2| - 1$
h) $q(x) = 2.|x - 3| + 1$

27) Graficar las siguientes funciones "sin tabla de valores", aplicando la definición de módulo.

a) $y = |x + 1|$
b) $y = 3.|x - 1| + 2$
c) $y = |x - 2| + |2 - 3|$
d) $y = |x - 3| - 3$
e) $\left.\begin{array}{c} y = -|x + 2| + 2 \\ y = -3.|x + 2| + 2 \end{array}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos
f) $y - 5.|5 - 10| = |2 - x|$

g) $y = |x^2 - 4|$
h) $y = |9 - x^2|$
i) $y = |\log x|$

28) Graficar ayudándose con una tabla de valores las siguientes funciones.

a) $y = (3-1)^x$
b) $y = 2^x + 2$
c) $\left.\begin{array}{c} y = 5^{x+1} - 1 \\ y = (1/5)^{x+1} - 1 \end{array}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos
d) $\left.\begin{array}{c} y = 2^{x+2} \\ y = 2^{x-2} \end{array}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos
e) $\left.\begin{array}{c} y = 3^{2x+1} \\ y = 3^{(1/2)x+1} \end{array}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

29) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2^x \quad y \quad g(x) = (1/2)^x$$

a) Representarlas gráficamente.
b) Como se verifica que $0 < 1/2 < 1$, la función $g(x)$ es ……………………. en todo su dominio.
c) Como se verifica que $2 > 1$, la función $f(x)$ es ………………………. en todo su dominio.
d) Las funciones f y g pasan por el punto de coordenadas P: (;).
e) Las funciones f y g son simétricas respecto al eje …………………….

30) Analizar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) Si trasladamos a $f(x) = 2^x$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $g(x) = 2^{x-2}$.
b) Si trasladamos a $f(x) = 3^x$ dos unidades hacia arriba obtenemos $g(x) = 3^{x+2}$.
c) Si trasladamos a $f(x) = 3^x$ dos unidades hacia la derecha obtenemos $g(x) = 3^x/3^2$.
d) $f(x) = 3^{x-1}$ es el resultado de trasladar $g(x) = 3^x$ una unidad hacia la derecha.
e) $f(x) = e^x - 1$ es el resultado de trasladar $g(x) = e^x$, e unidades hacia la izquierda.
f) Las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = -e^x$ son simétricas respecto al eje de las abscisas.

31) Dadas las siguientes funciones:

a) $y = -3.e^{-x}$
b) $y = 2^{-x} - 2$
c) $y = -2.2^x + 2$

Analizar dominio e imagen, raíces, ordenada al origen, intervalos C^+ y C^-, crecimiento y decrecimiento. Demostrar analíticamente la paridad e imparidad de cada una.

32) Un cultivo que posee inicialmente 60 bacterias, se triplica por cada hora que transcurre. Encontrar la función que modela en número de bacterias transcurridas t horas y responder:

a) ¿Cuántas bacterias se habrán desarrollado al cabo de 1 día?
b) ¿Cuántas horas deberán pasar para que crezcan $5x10^{16}$ bacterias?

33) El elemento radiactivo radón, se desintegra a gran velocidad según la función $m(t) = 10e^{-0,02t}$ siendo $m(t)$ la cantidad de masa restantes después de "t" días.

a) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que disminuya una masa de radón de 5 mg?
b) ¿Cuántos días deberán pasar para que se desintegre una masa de 9,32 mg?
c) Encontrar la masa inicial.

34) La vida media del estroncio 90 es de 25 años, lo cuál significa que la mitad de cualquier cantidad de éste se desintegrará en 25 años. Si una muestra de estroncio 90 tiene una masa inicial de 24 mg, encontrar una expresión para la masa $m(t)$ que queda después de t años. Hallar luego la masa que queda transcurridos 40 años.

35) Analizar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) Si trasladamos a $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $g(x) = \log_3(x-2)$.
b) Si trasladamos a $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia arriba obtenemos $g(x) = \log_3(x+2)$.
c) Si trasladamos a $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia la derecha obtenemos $g(x) = \log_3(x-2)$.
d) $g(x) = \log_3(x-1)$ es el resultado de trasladar $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia la derecha.
e) $g(x) = \ln(x+e)$ es el resultado de trasladar $f(x) = \ln(x)$ e unidades hacia la izquierda.

36) Graficar las siguientes funciones logaritmicas ayudándose de una tabla de valores y analizar: Dominio e imagen, ordenada al origen, raíz, positividad y negatividad, crecimiento y decrecimiento, asíntotas.

a) $y = \log\ (x+2) + 2$
b) $y = \ \log\ (2x) - 1$
c) $y = \log\ \left((1/2)x\right) - 1$

37) En el parque nacional Laguna Blanca a unos 20 Km de Zapala, se introdujo una variedad de peces (percas). Se estima que cada 3 meses ésta población se duplica. Un cardumen inicia con 100 peces, y el tiempo t en meses que se necesita para que dicho cardumen crezca a P peces se establece por la siguiente función:

$$t = 3\frac{\log(P/100)}{\log 2}$$

a) Calcular el tiempo necesario para que el cardumen crezca a 2 millones de peces.
b) ¿Cuál será el tamaño del cardumen después de 1 año y medio?

38) Graficar las siguientes funciones racionales y desarrollar analíticamente: Dominio, asíntotas, raíces y ordenada al origen. Analizar luego desde la gráfica obtenida: $C^+ \ y \ C^-$, paridad e imparidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, biyectividad e imagen.

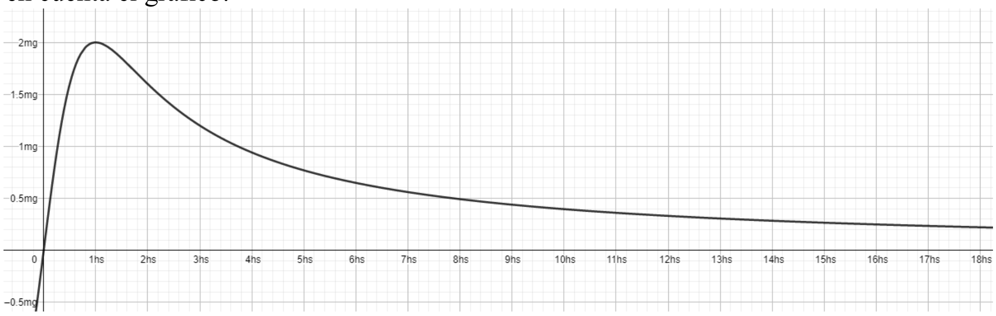
a) $y = \frac{1}{x+2}$
b) $y = \frac{1}{x-1} - 1$
c) $y = -\frac{1}{x-1} + 3$
d) $y.(x+2)^2 = 2$
e) $y - 2 = 1/x^2$
f) $y = \frac{4}{-x-2}$
g) $-(y-3) = 2/(3-x)$
h) $f(x).(-x) = 1/2$
i) $y = \frac{x-3}{x^2-9}$
j) $y - 3 = -(x-1)^{-2}$

k) $\left.\begin{array}{r} y = \frac{5}{x} + 7 \\ y = \frac{5}{x+7} \end{array}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

39) Se administra un medicamento a un paciente y se vigila la concentración de dicho medicamento en la sangre. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó el medicamento), la concentración (en mg/L) está dada por:

$$c(t) = \frac{4t}{t^2 + 1}$$

Teniendo en cuenta el gráfico:



a) ¿Qué ocurre con la concentración después de muchas horas?
b) ¿Cuánto tarda la concentración en llegar a 2 mg/L?
c) ¿Si se requiere que la concentración no baje de 0,5 mg/L, cuantas horas deberán pasar para suministrar nuevamente el medicamento?

40) Graficar las siguientes funciones por partes y analizar dominio, imagen, biyectividad, crecimiento, decrecimiento, paridad, imparidad, C^+, C^-, asíntotas, raíces y ordenada al origen.

a) $u(x) = \begin{cases} |x-4| + 3 & si \quad x > 3 \\ (x-1)^2 - 1 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ x & si \quad -2 < x \leq 0 \\ -3 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si \quad x \leq -1 \\ 1 & si \quad -1 < x \leq 1 \\ 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \forall \quad x \in (-\infty; 0] \\ 3 & \forall \quad x \in (0; 4) \\ (x-4)^2 & \forall \quad x \in [4; +\infty) \end{cases}$

d) $r(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \forall \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \forall \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \forall \quad x \geq 1 \end{cases}$

e) $s(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \forall \quad x \in (-\infty; -1) \\ 1{,}36 & \forall \quad x = -1 \\ x^2 & \forall \quad x \in (-1; 2) \\ -x + 4 & \forall \quad x \in (2; +\infty) \end{cases}$

f) $t(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-3} & \forall \quad x \in (-\infty; 3) \\ x - 15 & \forall \quad x \in [3; +\infty) \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \log\,(x) & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

h) $l(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & si \quad x \in (-\infty; -2) \\ x & si \quad x \in [-2; 4] \\ \frac{1}{x-4} & si \quad x \in (4; +\infty) \end{cases}$

i) $w(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x < -1 \\ 1 - 2x & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

j) $v(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x + 6 & si \quad 3 < x \leq 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$

41) Analizar dominio y biyectividad, restringir el dominio en caso de ser necesario y hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Graficar la función original y su inversa en un mismo par de ejes cartesianos y comprobar sus simetrías con respecto a la recta identidad.

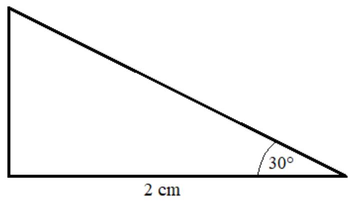
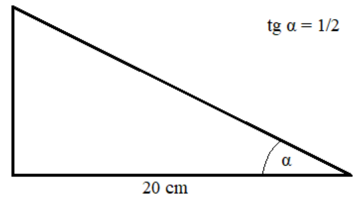
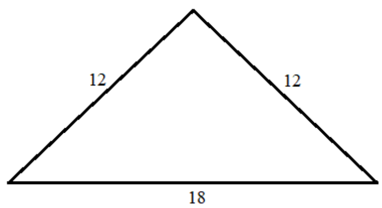
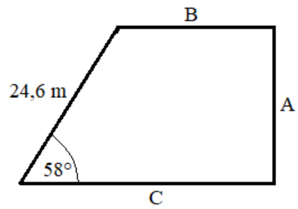
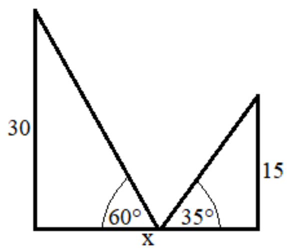
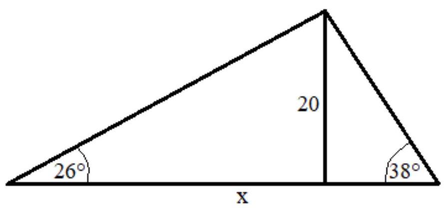
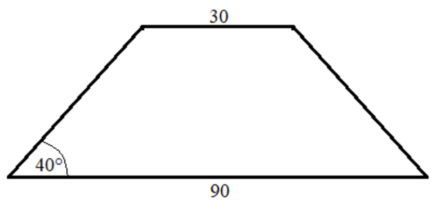
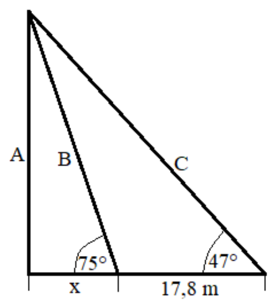
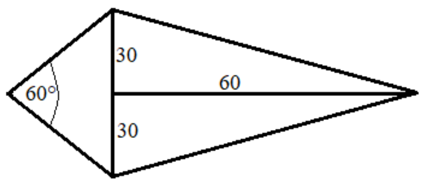
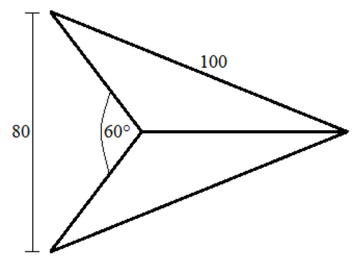
a) $y = 2x^2 + x$
b) $y = 1/x$
c) $y = x/(x+1)$
d) $y = 2x - 2$
e) $y = (2x+3)/(5-x)$
f) $x.(y-2) = y + 3$
g) $y = \sqrt{3x+4}$
h) $y = (x+1)/4$
i) $y = |3 - x|$
j) $g(x) = (5x-3)/x$
k) $y = x^3 + 1$
l) $y = \sqrt{1 - x^2}$
m) La función que pasa por (-1;2) y (5;-3)
n) La recta paralela a $y = (1/3)x - 3$
o) La recta con pendiente $m = -1$ y pasa por (3;-1)
p) la recta perpendicular a $y = -3x$ y pasa por (1;1)
q) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & para \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & para \quad x > 0 \end{cases}$
r) $g(x) = \begin{cases} -2x & para \quad x \geq 0 \\ x^2 & para \quad x < 0 \end{cases}$

42) A partir de la gráfica de $y = x^3 - 4x$, hallar la gráfica de $y = |x^3 - 4x|$. Para ambas, demostrar paridad e imparidad, inyectividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar analíticamente raíces y ordenada al origen.

Guía de trabajo N° 5

TRIGONOMETRIA

1) Hallar el perímetro y el área de las siguientes figuras.

a) 	b) 
c) 	d) 
e) 	f) 
g) 	h) 
i) 	j) 

2) Calcular la hipotenusa y los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm.

3) Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\sqrt{2}$ que forma con el cateto menor un ángulo de 45°.

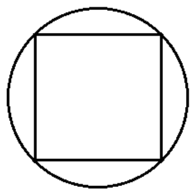
4) Desde un cierto lugar a nivel del suelo se ve la terraza de un edificio con un ángulo de elevación de 60º .Si nos alejamos 20m del edificio, el ángulo de elevación es de 30º . Hallar la altura del edificio.

5) En la llanura desde un punto medimos el ángulo de elevación a una montaña y se obtiene 35º Acercándose a la montaña una distancia de 200 m se vuelve a medir el ángulo y se obtienen 55º. ¿Cuál es la altura de la montaña?

6) Se quiere medir la anchura de un río, para lo cual nos paramos en una de las orillas y dirigimos la visual a un poste que se encuentra en la otra orilla obteniendo un ángulo de 53º. Al alejarnos de la orilla perpendicularmente un total de 20 m y mirar de nuevo el poste el ángulo es ahora de 32º. ¿Cuánto mide el río de ancho?

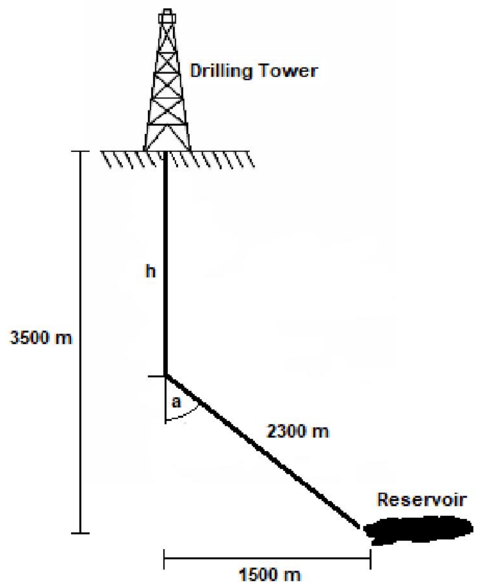
7) Una torre de perforación esta sujeta al suelo mediante dos cables que forman con la torre, ángulos de 36º y 48º. Si los puntos de sujeción de los cables al suelo y el pie de la torre se encuentran alineados y a una distancia total de 100 m, calcular la altura de la torre.

8) Hallar el perímetro y el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 20.

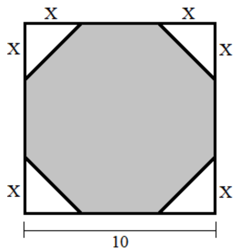


9) Si en un triángulo rectángulo, un cateto es la cuarta parte de la hipotenusa. ¿Cuánto miden los ángulos?

10) Un tipo de perforación direccional se muestra a continuación, en la cual no se requieren sartas intermedias y se utiliza para perforar pozos profundos en los que se requiere mucho desplazamiento lateral. Debido a la presencia de domos de sal, es necesario desviar a una profundidad "**h**" con un ángulo "**a**". Hallar éstos valores con los datos de la figura.



11) Escribir una fórmula que represente el área de un octógono regular inscrito en un cuadrado de lado 10 en función de las longitudes "X".



12) Graficar las siguientes funciones trigonométricas y analizar: raíces, intervalos de crecimiento y decrecimiento, paridad e imparidad, imagen, positividad y negatividad.

a) $y = 2.cos(2x) \quad para \quad 0 \le x \le 3\pi$

b) $y = (1/3).sen\,(x + \pi) \quad para \quad -\pi \le x \le \pi$

c) $y = (1/2).tg\,(x + \pi/2) \quad para \quad -3\pi/2 \le x \le 3\pi/2$

d) $y = sen\,[2.(x - \pi/4)] \quad para \quad 0 \le x \le 4\pi$

e) $y = [cos\,(2x + \pi)] - 1 \quad para \quad -2\pi \le x \le 2\pi$

f) $y = \sec(x)$

g) $y = cosec(x)$

h) $y = cotg(x)$

13) Graficar y analizar los desplazamientos que ocurren en las siguiente funciones trigonométricas.

a) $\left.\begin{matrix} f(x) = 2.sen\,x \\ g(x) = 2.sen\,(2x) \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

b) $\left.\begin{matrix} f(x) = sen\,(2x + \pi/2) \\ g(x) = sen\,(x + \pi) \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

c) $\left.\begin{matrix} f(x) = \left(\frac{1}{3}\right).sen\,(3x) \\ g(x) = 3.sen\,\left(\frac{1}{3}x\right) \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

Graficar a, b y c entre $-\pi/4 \le x \le 2\pi$

d) $\left.\begin{matrix} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right).cos\,x \\ g(x) = 2.cos\,x \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

e) $\left.\begin{matrix} f(x) = (cos\,x) + 1 \\ g(x) = cos\,(x + 1) \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

f) $\left.\begin{matrix} f(x) = cos\, x \\ g(x) = cos(4x) \end{matrix}\right\}$ en un mismo par de ejes cartesianos

Graficar d, e y f entre $-3\pi \leq x \leq 3\pi$

14) Restringir el dominio de la función $y = cos(x)$ $entre$ $0 \leq x \leq \pi$ y graficar y^{-1} en un mismo par de ejes cartesianos. Verificar la simetría de ambas funciones con respecto a la recta identidad.

15) Restringir el dominio de la función $y = sen(x)$ $entre - \pi/2 \leq x \leq \pi/2$ y graficar y^{-1} en un mismo par de ejes cartesianos. Verificar la simetría de ambas con respecto a $y = x$.

16) Encontrar el valor de "x" que satisfaga las siguientes igualdades.

a) $2.sen(x) = 1$
b) $tg(x) = -1$
c) $3.tg(x) = 2.\cos(x)$
d) $cos^2(x) + \left(\frac{5}{2}\right).\cos(x) = -1$
e) $4.tg^2(x) - 3.sec^2(x) = 0$
f) $tg(x).sen(x) - sen(x) = 0$
g) $2.sen(x).\cos(x) - \cos(x) = 0$
h) $\sqrt{3}.tg(x) - 1 = 0$
i) $tg\left(\frac{3x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
j) $sen(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
k) $sen(2x) - sen(x) = 0$
l) $sen(x) - \sqrt{3}.\cos(x) = 0$
m) $tg(x) + 4.cotg(x) = 5$
n) $2.sen^2(x) + \cos(2x) = 4.\cos^2(x)$
ñ) $\cos(2x) - sen(x) - sen(2x) - \cos(x) = 0$
o) $sen^4(x) - cos^4(x) = 1/2$
p) $\frac{cos^2(x)}{2.\cos(x) + sen(x)} = sen(x)$
q) $sen(2x) = \cos(x)$
r) $cos^2(x) - sen^2(x) = \cos(3x)$
s) $sen(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
t) $\cos(4x + \pi) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
u) $\cos(x).[\cos(x + 5)] = 2 + sen^2(x)$
v) $\sqrt{2}.sen(x - 1) = 0$
w) $sec^2(x) - 2 = 0$
x) $\sec(x).\left[2.\cos(x) - \sqrt{2}\right] = 0$
y) $cosec(3x) = sen(3x)$
z) $cosec^2(x) - 4 = 0$

17) Verificar las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\frac{sen^2(x)}{1 + \cos(x)} = 1 - \cos(x)$

b) $\cos(x) + \cos(x).tg^2(x) = \sec(x)$

c) $[sen(x) - \cos(x)].[cosec(x) + \sec(x)] = tg(x) - cotg(x)$

d) $\frac{sen(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{sen(x)}$

e) $\cos(x).[tg(x) + 1] = sen(x) + \cos(x)$

f) $\frac{sen(x) + \cos(x)}{sen(x)} = 1 + \frac{1}{tg(x)}$

g) $\frac{sen(x)}{cosec(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} = 1$

h) $\frac{\sec(a)}{tg(a) + cotg(a)} = sen(a)$

i) $\frac{1 - sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{1 + sen(\alpha)}$

j) $\frac{tg(x) - sen(x)}{sen^3(x)} = \frac{\sec(x)}{1 + \cos(x)}$

k) $\sec(x).[1 - sen^2(x)] = \cos(x)$

l) $\frac{tg(x) + cotg(x)}{tg(x) - cotg(x)} = \frac{sec^2(x)}{tg^2(x) - 1}$

m) $[tg(a) + cotg(a)].[\cos(a) + sen(a)] = cosec(a) + \sec(a)$

n) $cos^2(x) - sen^2(x) = 2.cos^2(x) - 1$

o) $[sen(x) + \cos(x)]^2 = 2.sen(x).\cos(x) + 1$

p) $1 - 2.sen^2(x) = \frac{1 - tg^2(x)}{1 + tg^2(x)}$

q) $cos^4(x) - sen^4(x) + 1 = 2.cos^2(x)$

r) $\frac{1 + sen(x)}{1 - sen(x)} - \frac{1 - sen(x)}{1 + sen(x)} = 4.tg(x).\sec(x)$

s) $2.tg(x).\left[\frac{1 + \cos(x)}{2}\right] = sen(x) + tg(x)$